



# Polynomial speeds in a Discontinuous Galerkin code

Hélène Barucq, Julien Diaz, Vanessa Mattesi

## ► To cite this version:

Hélène Barucq, Julien Diaz, Vanessa Mattesi. Polynomial speeds in a Discontinuous Galerkin code. [Internship report] INRIA Bordeaux. 2015, pp.57. hal-01176854v2

**HAL Id: hal-01176854**

**<https://inria.hal.science/hal-01176854v2>**

Submitted on 27 Jul 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Prise en compte de vitesses de propagation polynomiales dans un code de simulation Galerkin discontinu

Hélène Barucq , Julien Diaz, Vanessa Mattesi

**RESEARCH  
REPORT**

**N° 8756**

Juillet 2015

Project-Team Magique-3D





## Prise en compte de vitesses de propagation polynomiales dans un code de simulation Galerkine discontinue

Hélène Barucq \*, Julien Diaz \*, Vanessa Mattesi\*

Équipe-Projet Magique-3D

Rapport de recherche n° 8756 — Juillet 2015 — 57 pages

**Résumé :** Ce stage s'inscrit dans le cadre de la prospection pétrolière. Parmi les méthodes d'exploration géophysiques, la sismique réflexion est l'une des plus couramment utilisées car elle fournit une image précise du sous-sol. Même si le principe de la sismique réflexion est simple, son utilisation reste assez complexe. L'exploration pétrolière se fait en 3 étapes : acquisition de données, traitement et interprétation. Notre travail se situe à l'étape de traitement et plus particulièrement, nous nous intéressons à la propagation des ondes dans le sous-sol. Les ondes sismiques sont des ondes élastiques, cependant dans les milieux industriels, les problèmes ne sont pas étudiés en priorité en tant que problèmes élastiques, mais simplifiés en problèmes acoustiques. Il s'agit là d'une approximation sommaire du milieu réel de propagation mais nous en retirons une partie très importante et souvent suffisante de l'information.

Nous utilisons la méthode de Galerkin discontinue pour résoudre numériquement ce problème acoustique et nous expliquerons ce choix. Actuellement, dans cette méthode, les vitesses sont prises constantes par maille. Cependant, dans le cas de milieux fortement hétérogènes, nous nous interrogeons sur la pertinence des vitesses constantes par mailles et si des vitesses polynomiales par maille approcheraient mieux la réalité.

Mon stage repose donc autour de cette question et mes principaux objectifs sont, premièrement, à partir d'un code matlab en  $1D$  qui calcule la propagation des ondes avec la méthode de Galerkin discontinue, implémenter des vitesses polynomiales par maille. Deuxièmement, nous allons transposer ces implémentations dans un code  $2D$  en fortran, c'est à dire mettre des vitesses polynomiales par maille en  $2D$ . Enfin, nous testerons l'intérêt de la méthode.

**Mots-clés :** prospection pétrolière, propagation des ondes, ondes acoustiques, vitesses polynomiales par maille, méthode de Galerkin Discontinue

---

\* EPC Magique-3D

## Polynomial speeds in a Discontinuous Galerkin code

**Abstract:** The main topic of this internship is the oil exploration. The seismic reflection is the most commonly used method because it furnishes a detailed image of the sub-soil. Even if the principle of the seismic reflection is simple, its use remains rather complex. The oil exploration is made in 3 stages : data acquisition, processing and interpretation. Our work is situated in the stage of treatment and more particularly, we are interested in the wave propagation into the subsurface. Seismic waves are elastic waves, however, in the industrial applications, the problems are not studied first as elastic problems, but as acoustic problems. This is a simplification of the real environment but we remove a very important part of the information from it .

We use the Discontinuous Galerkin method to solve numerically this acoustic problem and we shall explain this choice. At present, in this method, speeds are constants by mesh. However, in the case of strongly heterogeneous media, we wonder if polynomial speeds by mesh would better approach the reality than constant ones. My internship will answer this question. My main objectives are, in the first place, to implement polynomial speeds by mesh from a matlab 1D-code which computes the wave propagation (with the Discontinuous Galerkin method). Secondly, we are going to transpose these implementations into a fortran 2D-code. Finally, we shall test the interest of the method.

**Key-words:** oil exploration, wave propagation, acoustic wave, polynomial speeds by mesh, Discontinuous Galerkin method

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation de l'entreprise</b>	<b>4</b>
1.1	L'INRIA . . . . .	4
1.2	Chiffres clés . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Présentation du thème du stage</b>	<b>5</b>
2.1	Présentation de l'équipe projet Magique3D . . . . .	5
2.2	Axes de recherche . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Contexte d'étude</b>	<b>6</b>
3.1	Imagerie sismique . . . . .	6
3.2	Acquisition sismique . . . . .	6
3.3	Ondes sismiques . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Présentation des objectifs du stage</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Présentation des choix et des outils utilisés pour répondre au problème</b>	<b>8</b>
5.1	Propagation des ondes . . . . .	8
5.1.1	L'équation des ondes acoustiques . . . . .	8
5.1.2	La méthode par différences finies . . . . .	9
5.1.3	La méthode des éléments finis . . . . .	9
5.2	Galerkin Discontinue : Motivation et Mise en œuvre . . . . .	10
5.2.1	Pourquoi appliquer une approximation de Galerkin Discontinue? . . . .	10
5.2.2	Quels avantages par rapport à une formulation variationnelle continue? .	11
<b>6</b>	<b>Présentation des outils mathématiques et informatiques</b>	<b>12</b>
6.1	La méthode de Galerkin Discontinue . . . . .	12
6.1.1	Notations . . . . .	12
6.1.2	Discretisation en espace . . . . .	13
6.1.3	Construction de la matrice de masse $\mathcal{M}$ . . . . .	18
6.1.4	Calcul de la matrice de raideur $K$ . . . . .	24
6.1.5	Calcul de la matrice d'amortissement . . . . .	27
6.1.6	Discretisation en temps . . . . .	27
<b>7</b>	<b>Contribution personnelle et résultats</b>	<b>28</b>
7.1	Prise en compte de variations polynomiales . . . . .	29
7.1.1	Principe : interpolation de Lagrange . . . . .	30
7.1.2	Calcul de la matrice de masse $\mathcal{M}$ . . . . .	32
7.1.3	Calcul de la matrice de raideur $\mathcal{K}$ . . . . .	38
7.2	Tests et Validations . . . . .	42
7.2.1	Conditions d'expérience en 1D . . . . .	42
7.2.2	Résultats en 1D . . . . .	44
7.2.3	Conditions d'expérience en 2D . . . . .	51
7.2.4	Résultats en 2D . . . . .	51

# 1 Présentation de l'entreprise

## 1.1 L'INRIA

L'INRIA est un institut national de recherche en informatique et en automatique, placé sous la double tutelle des ministères de la recherche et de l'industrie. Depuis plus de quarante ans, il accompagne les mutations économiques et sociales liées à la diffusion des technologies numériques. L'institut mène au plus haut niveau international, avec ses partenaires académiques et industriels, une activité de recherche fondamentale et de développement technologique toujours plus rayonnante.

L'INRIA se compose de 4200 personnes réparties entre le siège et ses 8 centres de recherche situés à Rocquencourt, Rennes, Sophia Antipolis, Grenoble, Nancy, Bordeaux, Lille et Saclay. 3350 scientifiques de l'INRIA et d'organismes partenaires (CNRS, universités, grandes écoles) travaillent dans plus de 174 équipes-projets de recherche. Un grand nombre de chercheurs de l'INRIA sont également enseignants, et leurs étudiants (environ 1000) préparent leur thèse au sein de l'institut.

Le budget de l'INRIA s'élève à 217 millions d'euros, dont 21% de ressources propres.

L'INRIA développe de nombreux partenariats avec le monde industriel, favorise le transfert technologique et la création d'entreprises dans le domaine des STIC. Plus de 98 entreprises ont été créées grâce au soutien de sa filiale INRIA-transfert, spécialisée dans l'accompagnement, l'évaluation, la qualification et le financement des jeunes entreprises innovantes de haute technologie informatique. L'INRIA est actif au sein d'instances de normalisation comme l'IETF, l'ISO ou le W3C dont il a été le pilote européen de 1995 à 2002.

Enfin, l'institut entretient d'importantes relations internationales : en Europe, l'INRIA est membre du consortium ERCIM, qui regroupe des instituts de recherche de 20 pays européens. L'INRIA participe à une centaine d'actions dans le cadre du septième PCRD. À l'international, l'institut collabore avec de nombreuses institutions scientifiques et universitaires (laboratoires de recherche conjoints tels que LIAMA, équipes de recherche associées, programmes de formation et de stages, etc.).

La stratégie de l'institut repose sur la combinaison étroite de l'excellence scientifique et du transfert technologique. Pour les années 2008 – 2012, l'INRIA se fixe de nouveaux défis à la fois scientifiques et technologiques. Les sept priorités scientifiques pour répondre aux enjeux de demain sont les suivantes :

- La modélisation, entre mathématique et informatique
- La programmation, cœur de la science informatique
- La communication et les réseaux
- L'interaction entre réel et virtuel
- Les sciences numériques
- L'ingénierie numérique
- La médecine numérique

## 1.2 Chiffres clés

- Ressources budgétaires (décembre 2010),
- budget total : 217 M Euros HT

- ressources propres : 1/5

Ressources humaines (décembre 2010) :

- 4200 personnes
- 3350 scientifiques, dont 1300 chercheurs et enseignants-chercheurs, 1200 doctorants, 250 post doctorants et contractuels.
- 900 chercheurs étrangers (dont doctorants et post doctorants) originaires de 78 pays.

Activités scientifiques (décembre 2010) :

- 214 équipes de recherche dont 174 équipes-projets INRIA
- 4500 publications scientifiques
- 300 thèses soutenues

Relations industrielles (décembre 2010)

- 800 contrats de recherche actifs
- 230 brevets actifs
- 103 logiciels déposés à l'Agence pour la Protection des Programmes
- 98 sociétés de technologie issues de l'INRIA.

## 2 Présentation du thème du stage

### 2.1 Présentation de l'équipe projet Magique3D

Cette équipe-projet dirigée par Hélène Barucq, rassemble des enseignants chercheurs du Laboratoire de Mathématiques et de leurs applications (LMA, UMR 5142) de l'UPPA ainsi que des chercheurs de l'INRIA. Son principal objectif est d'appliquer les progrès récents du calcul scientifique 3D haute-résolution à divers domaines de la géophysique et en particulier la propagation des ondes. Il s'agit d'abord de développer des modèles suffisamment sophistiqués pour prendre en compte la complexité de la physique des phénomènes considérés. On applique ensuite ces modèles à des cas concrets ce qui implique la résolution de grands systèmes et par conséquent le développement de méthodes numériques avancées.

### 2.2 Axes de recherche

#### **Modélisation mathématique de la propagation des ondes et des phénomènes physiques sous-jacents**

Dans le but d'imaginer le sous-sol par analyse des ondes sismiques, la communauté géophysique souhaite élaborer des codes de migration à amplitudes préservées. La majorité des géophysiciens se placent dans le formalisme de Kirchhoff et procèdent ensuite à des corrections d'amplitudes. L'équipe se propose plutôt d'évaluer directement les amplitudes exactes des événements sismiques en développant des modèles plus complets.

Les chercheurs de l'équipe se fédèrent autour de cet axe pour la construction de ces nouveaux modèles, l'analyse de leurs propriétés qualitatives et leur mise en œuvre. Les aspects numériques sont rendus difficiles par le fait que les systèmes à résoudre sont posés en domaine non borné. L'équipe contourne cette difficulté en construisant et en intégrant des conditions aux limites artificielles (absorbantes). Leur intégration nécessite un travail d'optimisation afin d'améliorer la précision des résultats numériques et/ou de réduire le coût de calcul.



### Simulation numérique, calcul parallèle, grilles de calcul («Grid Computing»)

Pour le calcul de sismogrammes synthétiques, la méthode des éléments spectraux a récemment démontré son intérêt par rapport aux techniques plus classiques telles que la méthode des différences finies, longtemps privilégiée par la communauté géophysique. Ils utilisent cette méthode pour quantifier l'effet de la topographie et des variations de structure géologique sur la propagation des ondes sismiques. L'équipe s'intéresse également à des problèmes d'inversion sismique simplifiés dans des structures 3D, par exemple pour l'analyse de la propagation des ondes de surface dans la couche superficielle altérée en sismique terrestre (« ground roll in the Wz weathered zone »).

## 3 Contexte d'étude

### 3.1 Imagerie sismique

Parmi les méthodes d'exploration géophysique, la sismique réflexion est l'une des plus utilisées. Elle est aujourd'hui la seule en mesure de fournir une image précise du sous-sol. Même si le principe de la sismique réflexion est simple, son utilisation reste assez complexe. L'exploration pétrolière se fait en 3 étapes :

1. Acquisition de données
2. Traitement
3. Interprétation

### 3.2 Acquisition sismique

Les hydrocarbures sont encore à l'heure actuelle une source d'énergie très convoitée et souvent difficile à remplacer. La majorité des bassins sédimentaires sont répertoriés, mais les taux actuels d'extraction ne sont que de 30%. La localisation des pièges à hydrocarbure se fait par une 'échographie' du sol, en utilisant la sismique réflexion. Cette technique correspond à l'enregistrement des ondes réfléchies, générées par la propagation artificielle d'ondes sismiques générées par une source explosive ou vibrante. Les récepteurs enregistrent les temps d'arrivée des ondes réfléchies par les discontinuités du milieu, ainsi que leur amplitude.

On peut alors établir une carte du sous-sol dans laquelle on place les réflecteurs grâce aux temps d'arrivée, et les amplitudes des champs réfléchis permettent de retrouver les caractéristiques des matériaux. Le plus souvent, la carte obtenue représente les variations de vitesses de propagation dans le milieu, on appelle cette carte le modèle de vitesse (phase de traitement sismique). L'étape durant laquelle on positionne les réflecteurs est appelée migration.

En fonction du milieu dans lequel se fera l'acquisition, on différencie les acquisitions terrestres des acquisitions marines. Lors d'une campagne sismique marine, les capteurs sont montés dans des flûtes sismiques (streamer), antennes rectilignes tractées par un bateau, dans des OBS (Ocean Bottom Seismometer), ou dans des OBC (Ocean Bottom Cable) déposés au fond de l'eau (l'interface eau-sol). Les OBC sont de plus en plus utilisés en défaveur des flûtes sismiques car ils permettent d'obtenir une meilleure image du sous-sol.

En fonction des méthodes d'acquisition employées et des objectifs désirés, il existe plusieurs catégories d'acquisitions sismiques :

- La sismique réflexion est utilisée pour caractériser les couches superficielles de la croûte terrestre. Les domaines principaux de la sismique réflexion sont la géophysique, le génie civil et la surveillance (monitoring) des réservoirs souterrains.
- La sismique réfraction est utilisée généralement pour imager les structures géologiques profondes. Des campagnes menées en mer ont permis des investigations pouvant aller jusqu'à des profondeurs de 50 km sismique. Elle est aussi utilisée par des géophysiciens, car elle permet d'estimer aisément les vitesses de propagation des ondes dans les couches du sous-sol.

Les sources sismiques ont pour but de provoquer une déformation ponctuelle du milieu, qui crée une énergie qui se propage ensuite sous forme d'ondes élastiques. En fonction de la nature de l'acquisition et de l'objectif de la campagne, plusieurs types de sources sont envisageables.

- En sismique terrestre, dans les régions peu habitées, les explosifs sont les sources préférées car la quantité d'énergie libre est importante et la signature temporelle du signal est brève. En zone urbaine, les camions vibreurs et les chutes de masses sont préférés aux explosions pour des raisons évidentes de sécurité et de limitation des effets sur l'environnement.
- En acquisition marine, nous retrouvons comme source sismique les explosifs qui sont depuis quelques années de moins en moins utilisés à cause de leurs effets destructeurs sur l'environnement. On leur substitue des canons à eau basés sur l'expulsion de l'air (ou de l'eau) sous pression à une profondeur définie.

Les capteurs sismiques sont des convertisseurs d'énergie qui transforment le mouvement du milieu en signal électrique. Ce signal, échantillonné et numérisé, est enregistré sous forme de documents sismiques constituant l'outil de travail d'interprétation des géophysiciens. Il existe deux types de capteurs sismiques. Les géophones (ou sismomètres) sont des capteurs utilisés pour mesurer les mouvements du sous-sol. En fonction de leur construction, ils peuvent traduire la vitesse ou l'accélération du mouvement du milieu sur un axe. Pour les acquisitions marines, on peut utiliser des hydrophones qui sont des capteurs capables de transformer les variations de pression auxquelles ils sont soumis en courant électrique. Ils sont classiquement utilisés dans les OBC ou placés dans des flûtes sismiques.

### 3.3 Ondes sismiques

Après avoir présenté succinctement les dispositifs d'acquisitions et quelques applications en sismique, regardons les caractérisations des ondes.

Les ondes sismiques sont des ondes élastiques, c'est-à-dire que *l'onde peut traverser un milieu sans modifier durablement ce milieu*. L'impulsion de départ va « pousser » les particules suivantes et reprendre leur place, et ainsi de suite.

On distingue les ondes de volume qui traversent la Terre et les ondes de surface, qui se propagent parallèlement à la surface. Elles se succèdent et se superposent sur les enregistrements des sismomètres. Leur vitesse de propagation et leur amplitude sont modifiées par les structures géologiques traversées, c'est pourquoi les signaux enregistrés sont la combinaison d'effets liés à la source, aux milieux traversés et aux instruments de mesure.

On différencie :

- Les ondes P ou ondes primaires. Ce sont les plus rapides (6km/s près de la surface) et elles sont enregistrées en premier sur un sismogramme.

- Les ondes S ou ondes secondaires. Elles ne se propagent pas dans les milieux liquides. Leur vitesse de propagation est plus longue que les ondes P, elles apparaissent donc en second sur l'enregistrement des sismogrammes.

Notons que dans les milieux industriels, les problèmes ne sont pas étudiés en priorité en tant que "problèmes élastiques", mais simplifiés en "problèmes acoustiques". C'est comme si l'on considérait la terre comme étant un fluide. Il s'agit là d'une approximation sommaire du milieu réel de propagation mais on en retire une partie très importante et souvent suffisante de l'information.

Ces approximations sont nécessaires car les problèmes élastiques sont difficiles à mettre en place, notamment de part le choix des paramètres, ainsi qu'un temps de calcul trop important pour une application à grande échelle (présence de tenseurs et variables supplémentaires). Cependant, vu l'amélioration très conséquente des calculateurs, on commence à travailler sur ce type d'équations pour la production.

## 4 Présentation des objectifs du stage

On utilise actuellement des vitesses constantes par maille dans la méthode de Galerkin Discontinue. Cependant, on peut se demander si cette méthode reste adaptée dans des milieux fortement hétérogènes et s'il ne vaudrait pas mieux avoir des vitesses polynomiales par maille afin de se rapprocher de la réalité.

Mon stage repose donc autour de cette question et mes principaux objectifs sont :

- A partir d'un code matlab en 1D qui calcule la propagation des ondes avec la méthode de Galerkin discontinue, implémenter des vitesses polynomiales par maille.
- Transposer ensuite dans un code 2D en fortran, mettre des vitesses polynomiales par maille en 2D.
- Dans les deux cas, nous testerons l'intérêt de la méthode.

## 5 Présentation des choix et des outils utilisés pour répondre au problème

### 5.1 Propagation des ondes

Nous allons introduire les différentes méthodes utilisées pour approcher une EDP (Equation aux Dérivées Partielles). Nous introduisons ici la résolution de l'équation des ondes par différence finies ainsi que les principaux aspects de la méthode par éléments finis à des fins de comparaison ; mais nous allons surtout nous intéresser à la méthode des éléments finis. Nous considérerons que nous sommes en 2D.

#### 5.1.1 L'équation des ondes acoustiques

La propagation des ondes acoustiques est modélisée par l'équation scalaire du second ordre suivante :

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \operatorname{div} \frac{1}{\rho} \nabla u(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1)$$

où  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,  $t \in ]0, T_f[$ ,  $T_f$  est le temps de simulation total,  $(\mathbf{x}, t)$  est le champ d'onde,  $\mu$  et  $\rho$  sont des paramètres tels que  $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  est la vitesse de propagation des ondes dans le milieu. L'opérateur  $\nabla$  désigne le gradient.

### 5.1.2 La méthode par différences finies

Cette méthode est la plus facile à mettre en œuvre. On effectue la discrétisation des opérateurs de dérivation/différentiation par développement de Taylor successifs. On note  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  les pas d'espace et  $\Delta t$  le pas de temps.

On introduit la notation  $\mathbf{x}_{ij} = (x_i, y_j)$  où  $x_i = i \Delta x$ ,  $y_j = j \Delta y$ ,  $\forall i, j \in \mathbf{N}$  et  $t^n = n \Delta t$ . La solution ainsi calculée au temps  $n$  se note :  $u_{i,j}^n$ . Nous allons discrétiser (1). On suppose alors qu'il existe  $\xi_1 \in ]t, t + \Delta t[$  et  $\xi_2 \in ]t - \Delta t, t[$  tel que pour une fonction  $u$  suffisamment régulière, on a le développement de Taylor-Lagrange d'ordre 4 suivant :

$$u(\mathbf{x}, t + \Delta t) = u(\mathbf{x}, t) + \Delta t \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u(\mathbf{x}, \xi_1)}{\partial t^4} \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}, t - \Delta t) = u(\mathbf{x}, t) - \Delta t \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u(\mathbf{x}, \xi_2)}{\partial t^4} \quad (3)$$

En sommant (2) et (3), on obtient :

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{u(\mathbf{x}, t + \Delta t) + u(\mathbf{x}, t - \Delta t) - 2u(\mathbf{x}, t)}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^4}{24} \left( \frac{\partial^4 u(\mathbf{x}, \xi_1)}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 u(\mathbf{x}, \xi_2)}{\partial t^4} \right) \quad (4)$$

ce qui nous donne l'approximation suivante :

$$\frac{\partial^2 u(x_{i,j}, t^n)}{\partial t^2} \simeq \frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j}^{n-1} - 2u_{i,j}^n}{\Delta t^2} \quad (5)$$

Si l'on procède de la même manière, on obtient la discrétisation du laplacien suivante :

$$\Delta u(x_{i,j}, t^n) \simeq \frac{(u_{i+1,j}^n + u_{i,j+1}^n) + (u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n) - 6u_{i,j}^n}{\Delta h^2} \quad (6)$$

en supposant que la grille de calcul est régulière suivant chaque direction ( $\Delta x = \Delta y = \Delta h$ ).

En utilisant (1), on obtient le schéma suivant :

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta h^2} (u_{i+1,j}^n + u_{i,j+1}^n) + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta h^2} (u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n - 6u_{i,j}^n)$$

Le schéma aux différences finies permet d'exprimer le champ d'ondes numérique à un instant  $t$ . Malgré sa facilité de mise en œuvre comme nous l'avons vu sur un cas simple, **lorsque les topographies sont complexes cette méthode n'est pas efficace**. C'est pourquoi nous allons nous intéresser à la méthodes des éléments finis.

### 5.1.3 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation des équations aux dérivées partielles qui repose sur la discrétisation du domaine d'étude. Cette méthode de construction est très efficace pour reproduire précisément la géométrie du domaine de propagation étudié ainsi que la prise en compte de la topographie. La méthode des éléments finis repose principalement sur une formulation variationnelle du problème considéré. Maintenant regardons de façon formelle la mise en place de cette méthode afin de fixer les idées.

Notons  $\Omega$  un ensemble borné (domaine de calcul) et  $\Gamma$  sa frontière supposée régulière. Supposons que  $u = 0$  sur  $]0, T_f[ \times \Gamma$  et  $u$  assez régulière (par exemple  $u \in H_0^1(\Omega)$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(\Omega)$ ).

En multipliant (1) par une fonction  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient la formulation variationnelle comme étant, trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u \varphi dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad (7)$$

Définissons maintenant un espace d'approximation  $V^h$ . On cherche  $u(., t)$  dans l'espace :

$$V^h := \{v \in C^0 \cap H_0^1(\Omega) : v|_K \in P_p(K), \forall K \in T_h\} \quad (8)$$

où  $T_h$  est une discrétisation de  $\Omega$  en éléments  $K$  (triangles, quadrangles, ...),  $P_p(K)$  est l'espace des polynômes de degré  $p$  sur  $K$ . Le problème discrétisé associé à (1) est alors de trouver  $u_h$  tel que :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u_h \varphi_h dx + \int_{\Omega} c^2 \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h dx = 0, \forall \varphi_h \in V^h(\Omega) \quad (9)$$

où  $u_h : ]0, T_f[ \times V_h \rightarrow \mathbf{R}$ . On note  $x_i$  les nœuds du maillage pour  $1 \leq i \leq n$  et  $\{v_i, 1 \leq i \leq n\}$  une base de  $V_h$  telle que  $v_i(x_j) = \delta_{ij}$ . On cherche alors une décomposition de  $u_h$  sous la forme :

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^n u_{h,j}(t) v_j(x) \quad (10)$$

où  $n$  est le nombre de degrés de liberté.

On obtient alors avec (9) et (10) :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^n u_{h,j} v_j \right) v_i dx + \int_{\Omega} c^2 \nabla \left( \sum_{j=1}^n u_{h,j} v_j \right) \cdot \nabla v_i dx = 0, \forall v_i, 1 \leq i \leq n \quad (11)$$

Ce système est équivalent à :

$$\mathcal{M} \frac{d^2}{dt^2} U_h + \mathcal{K} U_h = 0 \quad (12)$$

où :

- $U_h$  est le vecteur de composantes  $(u_{h,j})_{1 \leq j \leq n}$
- $\mathcal{M}$  est la **matrice de masse**. Elle est définie par ses coefficients :  $\mathcal{M}_{ij} = \int_{\Omega} v_i v_j dx$ . Nous constatons qu'elle est symétrique.
- $\mathcal{K}$  est la **matrice de rigidité**. Elle est définie par :  $\mathcal{K}_{ij} = \int_{\Omega} c^2 \nabla v_i \cdot \nabla v_j dx$ . Nous constatons de même que cette matrice est symétrique.

Les éléments finis autorisent une géométrie théoriquement arbitraire et permettent également de considérer assez précisément le milieu considéré et en particulier des variations brutales des coefficients physiques.

## 5.2 Galerkin Discontinue : Motivation et Mise en œuvre

### 5.2.1 Pourquoi appliquer une approximation de Galerkin Discontinue ?

La méthode de Galerkin Discontinue (DG) a été initialement introduite par Reed and Hill en 1973, comme technique de résolution des problèmes hyperboliques de transport des neutrons. Cette technique devenant de plus en plus populaire, elle permet désormais de résoudre la plupart des équations aux dérivées partielles.

La méthode de Galerkin Discontinue (DG) est souvent assimilée à une méthode hybride ou mixte, car elle combine à la fois les caractéristiques de la méthode des éléments finis (FEM) et des volumes finis (FVM). En effet, la solution est représentée dans chaque élément comme étant une approximation polynomiale (comme dans les FEM) et au niveau des interfaces (arêtes communes en 2D, faces communes en 3D), on utilise des flux numériques (comme dans FVM). Théoriquement, les solutions peuvent être obtenues avec un ordre d'exactitude arbitrairement élevé.

De plus, la méthode DG permet la formation de schémas numériques compacts. Ceci est dû au fait que la représentation de la solution dans chaque élément est indépendante de la solution des autres cellules (aspect local). Ceci améliore grandement la robustesse et la précision de n'importe quelle implémentation de conditions de bord mais permet aussi la parallélisation du code de calcul.

Ces caractéristiques, en plus d'autres propriétés numériques favorables, font de DG une méthode extrêmement flexible (pouvant manipuler une grande variété d'éléments et de maillages) et permet de plus l'utilisation de techniques adaptatives de type hp-FRM (éléments de taille variable (h) et de degrés différents (p)).

### 5.2.2 Quels avantages par rapport à une formulation variationnelle continue ?

La discrétisation en éléments finis classiques ne conduit généralement pas à un schéma explicite, car la matrice de masse qui doit être inversée à chaque pas de temps n'est pas diagonale. En effet, cette matrice, bien que creuse, n'est en général pas diagonale (par blocs) et son inversion est souvent coûteuse. La méthode de Galerkin Discontinue dispose donc des avantages suivants :

- Gain en temps de calcul
- Préservation de l'ordre de convergence
- Facilité pour la mise en œuvre avec des maillages en triangles (en 2D) ou des tétraèdres (en 3D) grâce aux mailleurs existants
- Application sur des maillages non-structurés, donc grande flexibilité
- Grand intérêt pour le calcul parallèle car basées sur des calculs locaux

De plus, les méthodes de Galerkin continues imposent des restrictions sur les maillages qui doivent être conformes. En particulier, ces méthodes posent des problèmes aux "hanging nodes". L'avantage de la DG est de permettre l'utilisation de polynômes de degrés différents ou des hanging nodes (voir figure 1).

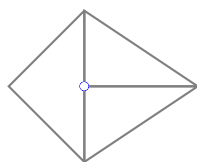


FIGURE 1 – Maillage des hanging nodes

Par contre on ne peut pas avoir deux éléments qui se coupent, car il ne serait pas trivial de définir l'élément fini à l'endroit où les triangles se coupent.

## 6 Présentation des outils mathématiques et informatiques

### 6.1 La méthode de Galerkin Discontinue

Tout d'abord rappelons l'équation des ondes considérée :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} \frac{1}{\rho} \nabla u &= f && \text{dans } \Omega \times I \\ u(x, 0) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0 && \text{dans } \Omega \\ u &= 0 && \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla u \cdot n &= 0 && \text{sur } \Gamma_{abs} \end{aligned}$$

où  $\Omega$  est un domaine convexe borné,  $I = ]0, T[$  est un intervalle de temps fini,  $f$  est une fonction de  $C^0([0, T[, L^2(\Omega))$ . Le paramètre  $\rho$  est la densité du milieu,  $\mu = \rho c^2$  est le module de compressibilité et  $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  est la vitesse de propagation. Ces paramètres sont continus dans chaque maille. On impose des conditions de Dirichlet homogènes sur  $\Gamma_D$  et une condition absorbante sur  $\Gamma_{abs}$ . Ce problème admet une solution unique  $u$  telle que  $u \in C^0([0, T[, H^1) \cap C^1([0, T[, L^2)$ ,  $\forall f \in C^0([0, T[, L^2)$ .

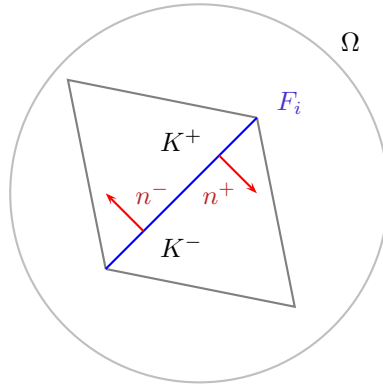
#### 6.1.1 Notations

Nous ne considérons ici que des maillages composés de triangles. On notera  $NT_h$  le nombre d'éléments du maillage. Considérons un domaine  $\Omega$  convexe et son maillage associé  $\mathcal{T}_h$  ainsi que l'espace d'approximation :

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega), v|_K \in \mathcal{P}_p(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (13)$$

où  $\mathcal{P}_p(K)$  est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$ . Nous notons :

- $\Gamma_{abs}$  une partie de la frontière  $\partial\Omega$  sur laquelle on pose des conditions de bord absorbantes,
- $\Gamma_D$  une partie de la frontière  $\partial\Omega$  sur laquelle on pose des conditions de bord de type Dirichlet,
- $\mathcal{F}_i$  l'ensemble des faces internes, c'est-à-dire les faces appartenant à deux éléments du maillage (que nous noterons arbitrairement  $K^+$  et  $K^-$ ),
- $\mathcal{F}_b$  l'ensemble des faces frontières, c'est-à-dire les faces appartenant à un seul élément du maillage,
- $n^\pm$  les vecteurs normaux à  $K^\pm$ , orientés vers l'extérieur de  $K^\pm$ ,
- $\varphi^\pm$  les traces d'une fonction  $\varphi$  sur  $K^\pm$ ,



### 6.1.2 Discrétisation en espace

Construisons le problème approché. Multiplions l'équation des ondes par une fonction continue par maille  $v$  et intégrons sur  $K$  un élément du maillage. On a :

$$\int_K \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v - \int_K \left( \operatorname{div} \frac{1}{\rho} \nabla u \right) v = \int_K f v \quad (14)$$

Avec la formule de Green, on peut modifier le deuxième terme de la façon suivante :

$$- \int_K \left( \operatorname{div} \frac{1}{\rho} \nabla u \right) v = \int_K \frac{1}{\rho} \nabla u \nabla v - \int_{\partial K} \frac{1}{\rho} (\nabla u \cdot n) v \quad (15)$$

où  $\partial K$  est la frontière de l'élément  $K$ . On somme ensuite sur tous les éléments du maillage et on obtient :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\rho} \nabla u \nabla v - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \frac{1}{\rho} (\nabla u \cdot n) v = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f v \quad (16)$$

Ce qui peut se réécrire :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\rho} \nabla u \nabla v - \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_F \frac{1}{\rho} (\nabla u \cdot n) v \\ - \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left( \frac{1}{\rho^+} (\nabla u^+ \cdot n^+) v^+ + \frac{1}{\rho^-} (\nabla u^- \cdot n^-) v^- \right) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f v \end{aligned}$$

**Intéressons nous au terme faisant intervenir les faces internes :**

$$- \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left( \frac{1}{\rho^+} (\nabla u^+ \cdot n^+) v^+ + \frac{1}{\rho^-} (\nabla u^- \cdot n^-) v^- \right) \quad (17)$$

Nous allons avoir besoin de définir le saut et la moyenne d'une fonction et d'un vecteur.

Définition du saut et de la moyenne : Pour  $F \in \mathcal{F}_i$ , on note  $[[\varphi]]$  le saut de la fonction  $\varphi$  et  $\{\{\varphi\}\}$



la moyenne de  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} [[\varphi]] &:= \varphi^+.n^+ + \varphi^-.n^- \\ \{\{\varphi\}\} &:= \frac{1}{2}(\varphi^+ + \varphi^-) \end{aligned}$$

Pour  $F \in \mathcal{F}_b$ , on note  $[[\varphi]] := \varphi.n$  et  $\{\{\varphi\}\} := \varphi$ .

De la même façon, nous définissons le saut et la moyenne d'un vecteur  $q$  par :

$$\begin{aligned} [[q]] &:= q^+.n^+ + q^-.n^- \quad \text{et} \quad \{\{q\}\} := \frac{1}{2}(q^+ + q^-) \quad \text{pour } F \in \mathcal{F}_i \\ [[\varphi]] &:= \varphi.n \quad \text{et} \quad \{\{\varphi\}\} := \varphi \quad \text{pour } F \in \mathcal{F}_b \end{aligned}$$

On va également se servir de la propriété suivante :

### Propriété 6.1

$$[[\varphi\psi]] = [[\varphi]] \{\{\psi\}\} + [[\psi]] \{\{\varphi\}\}$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} [[\varphi]] \{\{\psi\}\} &= \frac{1}{2}(\varphi^+.n^+ + \varphi^-.n^-)(\psi^+ + \psi^-) = \frac{1}{2}(\varphi^+\psi^+ + \varphi^+\psi^- - \varphi^-\psi^+ - \varphi^-\psi^-).n^+ \\ + [[\psi]] \{\{\varphi\}\} &= \frac{1}{2}(\psi^+.n^+ + \psi^-.n^-)(\varphi^+ + \varphi^-) = \frac{1}{2}(\psi^+\varphi^+ + \psi^+\varphi^- - \psi^-\varphi^+ - \psi^-\varphi^-).n^+ \\ &= \varphi^+\psi^+.n^+ + \varphi^-\psi^-.n^- = [[\varphi\psi]] \end{aligned}$$

■

Application de la définition du saut à l'équation 17 :

$$- \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left( \frac{1}{\rho^+} (\nabla u^+.n^+) v^+ + \frac{1}{\rho^-} (\nabla u^-.n^-) v^- \right) = - \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla uv \right] \right]$$

Grâce à la propriété (6.1), on a :

$$\left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla uv \right] \right] = \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla u \right] \right] \{\{v\}\} + [[v]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} \quad (18)$$

On veut faire apparaître une symétrie, pour cela on va utiliser des propriétés de l'équation des ondes.

### Propriété 6.2

Si  $u$  est solution de l'équation des ondes alors :

1.  $[[u]] = 0$
2.  $\left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla u \right] \right] = 0$

En effet, nous savons que l'onde  $u$  est continue dans  $\Omega$  et  $\left( \frac{1}{\rho} \nabla u \right)$  est continue à travers les interfaces, afin d'assurer la transmission du flux entre les deux milieux. On va utiliser ces propriétés pour la formulation variationnelle. La propriété 6.2 et (18) donnent :

$$\left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla uv \right] \right] = [[v]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} \quad (19)$$

On ajoute ensuite un terme nul pour obtenir une symétrie.

$$\left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla uv \right] \right] = [[v]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} + [[u]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} \quad (20)$$

On va rajouter un terme positif pour la coercivité :

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \gamma [[u]] [[v]] = 0 \quad (21)$$

où  $\gamma$  est un terme qui pénalise les sauts de  $u$  et  $v$  sur les arêtes de  $\mathcal{T}_h$ . Il est défini sur chaque arête du maillage par :  $\gamma := \frac{\alpha}{h}$ , où  $h$  désigne le pas de discrétisation (c'est-à-dire le diamètre de  $K$ ). On aura la coercivité si  $\alpha > \alpha_0$  (avec  $\alpha_0 = \frac{1}{2}p(p+1)$ ).

On obtient alors :

$$\begin{aligned} - \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left[ \left[ \frac{1}{\rho} (\nabla u \cdot n) v \right] \right] &= - \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left( [[v]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} + [[u]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} \right) \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \gamma [[u]] [[v]] \end{aligned}$$

Nous allons maintenant nous intéresser au terme de bord. Puisque sur les bords du domaine nous avons des conditions de Dirichlet ou des conditions aux limites absorbantes, on a :

$$- \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_F \frac{1}{\rho} (\nabla u \cdot n) v = - \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_{abs}} \frac{1}{\rho} (\nabla u \cdot n) v - \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \frac{1}{\rho} (\nabla u \cdot n) v \quad (22)$$

**Intéressons nous au terme faisant intervenir le bord absorbant :**

$$- \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_{abs}} \frac{1}{\rho} (\nabla u \cdot n) v \quad (23)$$

Si l'on considère la condition absorbante suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla u \cdot n = 0 \Rightarrow \nabla u \cdot n = - \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (24)$$

d'où :

$$\begin{aligned} - \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_{abs}} \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot n v &= \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_{abs}} \frac{1}{\rho} \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial u}{\partial t} v \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\mu \rho}} \frac{\partial u}{\partial t} v \end{aligned}$$

**Intéressons nous au terme faisant intervenir le bord de 'Dirichlet' :**

Condition de Dirichlet non-homogène

$$- \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot n v \quad (25)$$

On sait que pour  $F \in \mathcal{F}_b$ ,  $[[v]] := vn$  et  $\left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} := \frac{1}{\rho} \nabla u$  d'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \frac{1}{\rho} (\nabla u \cdot n) v &= \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla u v \right] \right] \\
&= \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} [[v]]
\end{aligned}$$

On symétrise ensuite en ajoutant un terme nul. Puisqu'on a une condition de Dirichlet non homogène, on considère  $u = g$  sur le bord  $\Gamma_D$ , on ajoute alors le terme :

$$- \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} [[u - g]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} = 0 \quad (26)$$

Ainsi que le terme contrôlant la coercivité :

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \gamma [[u - g]] [[v]] = 0 \quad (27)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
- \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \frac{1}{\rho} (\nabla u \cdot n) v &= - \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \left( \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} [[v]] + [[u]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} \right) \\
&+ \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} [[g]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} \\
&+ \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \gamma [[u - g]] [[v]]
\end{aligned}$$

En injectant (22), (25) et (28) dans l'équation bilan (17), on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\rho} \nabla u \nabla v + \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\rho \mu}} \frac{\partial u}{\partial t} v \\
&- \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \left( \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} [[v]] + [[u]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} \right) + \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \gamma [[u]] [[v]] \\
&- \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left( [[v]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} + [[u]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} \right) + \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \gamma [[u]] [[v]] \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f v - \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} [[g]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} + \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \gamma [[g]] [[v]]
\end{aligned}$$

Condition de Dirichlet homogène

$$- \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot n v \quad (28)$$

Tout comme le cas non-homogène, on sait que pour  $F \in \mathcal{F}_b$ ,  $[[v]] := v \cdot n$  et  $\left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} := \frac{1}{\rho} \nabla u$ , d'où :

$$- \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot n v = - \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} [[v]] \quad (29)$$

De même que pour le cas non-homogène, on doit symétriser la forme bilinéaire en considérant cette fois-ci sur le bord  $\Gamma_D$  que  $u = 0$ , on ajoute alors :

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} [[u]] = 0 \quad (30)$$

et le terme de coercivité :

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \gamma [[u]] [[v]] = 0 \quad (31)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} - \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot n v &= - \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \left( [[v]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} + \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} [[u]] \right) \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \gamma [[u]] [[v]] \end{aligned}$$

En injectant (22), (25) et (32) dans l'équation bilan (17), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \nabla v + \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\rho \mu}} \frac{\partial u}{\partial t} v \\ &- \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \left( \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} [[v]] + [[u]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} \right) + \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \gamma [[u]] [[v]] \\ &- \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left( [[v]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} + [[u]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} \right) + \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \gamma [[u]] [[v]] \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f v \end{aligned}$$

On a donc construit le problème semi-discretisé de (13). On doit alors trouver  $u : [0, T] \times V_h \rightarrow \mathbf{R}$  tel que  $\forall v \in V_h$  et  $\forall t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v \right) + b_h \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a_h(u, v) &= (f, v) \\ u|_{t=0} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

où  $(., .)$  désigne le produit scalaire sur  $L^2$  tel que :

$$\left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v \right) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v \quad (32)$$

$b_h$  désigne la forme bilinéaire sur  $V_h \times V_h$  telle que :

$$b_h(u, v) := \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\rho \mu}} \frac{\partial u}{\partial t} v \quad (33)$$

et enfin  $a_h$  désigne la forme bilinéaire sur  $V_h \times V_h$  telle que :

$$\begin{aligned} a_h(u, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\rho} \nabla u \nabla v \\ &- \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \left( [[u]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} + \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} [[v]] \right) + \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \gamma [[u]] [[v]] \\ &- \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left( [[u]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla v \right\} \right\} + \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla u \right\} \right\} [[v]] \right) + \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \gamma [[u]] [[v]] \end{aligned}$$

On obtient alors le système linéaire suivant :

$$\mathcal{M} \frac{d^2}{dt^2} U_h + \mathcal{B} \frac{d}{dt} U_h + \mathcal{K} U_h = \mathcal{F} \quad (34)$$

où  $U_h$  est le vecteur de composantes  $u_j$ ,  $\mathcal{M}$  est la matrice de masse (**diagonale par bloc**),  $\mathcal{B}$  est la matrice absorbante (**nulle partout sauf pour des éléments absorbants**),  $\mathcal{K}$  est la matrice de rigidité (**symétrique**) et  $\mathcal{F}$  est le vecteur source.

Intéressons-nous à la matrice de masse. Nous allons à présent voir pourquoi  $\mathcal{M}$  est diagonale par blocs.

### 6.1.3 Construction de la matrice de masse $\mathcal{M}$

Pour le maillage, en 2D, nous ne considérerons que des triangles. Nous appelons élément de référence  $\hat{K}$  :

- le segment  $[0, 1]$  en 1D
- le triangle de sommets  $\hat{S}_1(0, 0)$ ,  $\hat{S}_2(0, 0)$ ,  $\hat{S}_3(0, 0)$  en 2D (voir figure 2).

Il existe, pour tout élément  $K$ , une fonction affine  $F_K$  qui transforme  $\hat{K}$  en l'élément  $K$  :

- en 1D :

$$F_K(\hat{x}) = x_1 + (x_2 - x_1)\hat{x}$$

- en 2D :

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$$

où  $x_i, y_i$  sont les coordonnées du sommet  $S_i$  de l'élément  $K$ . Cette application peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$F_K(\hat{x}) = A_K \hat{x} + b_K$$

et son jacobien vérifie :  $J_{F_K} = A_K$  et  $|J_{F_K}| = |\det(A_K)|$ .

En ce qui concerne les degrés de liberté du maillage pour des éléments finis de type  $P_p$ , nous définissons les degrés de liberté sur l'élément de référence. Ainsi pour un élément  $K$ , ses degrés de liberté seront les images par  $F_K$  des degrés de liberté de  $\hat{K}$  :

- en dimension 1, les degrés de liberté de l'élément fini de Lagrange  $P_p$  sont les points de coordonnées

$$\hat{x}_i = \frac{i-1}{p}, \quad \forall i = 1 \dots p+1;$$

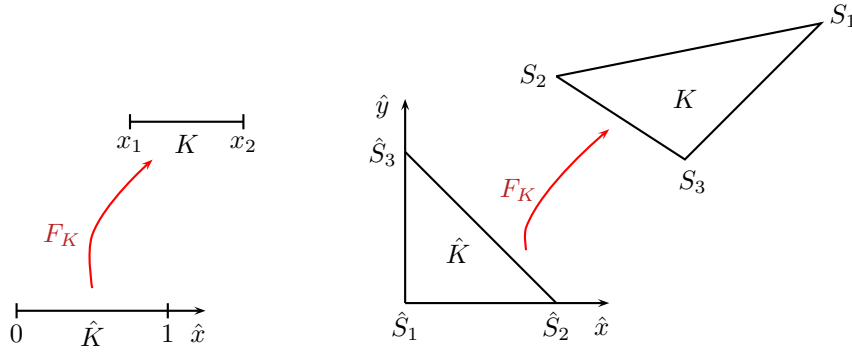
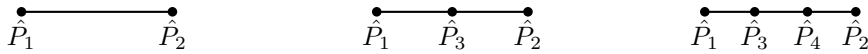
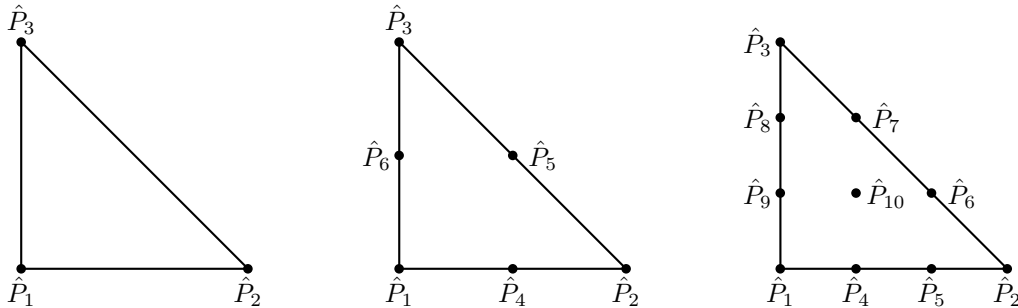


FIGURE 2 – Le segment et le triangle de référence.

- en dimension 2, les degrés de liberté de l'élément fini de Lagrange  $P_p$  sont les points de coordonnées

$$(\hat{x}_i, \hat{y}_j) = \left( \frac{i-1}{p}, \frac{j-1}{p} \right), \quad \hat{x}_i + \hat{y}_j \leq 1, \quad i, j = 1 \dots p+1;$$

(Voir les figures 3 et 4)

FIGURE 3 – Le segment de référence  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .FIGURE 4 – Le triangle de référence  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .

En ce qui concerne la prise en compte des termes de saut et des conditions de bord, nous devons connaître le passage sur l'élément de référence d'une arête (2D). C'est pourquoi nous définissons la fonction affine  $G_F^K$  transformant la face de référence  $\hat{F}$  (en 2D le segment  $[0, 1]$ ) en la face  $F$  de l'élément  $K$ ; en 2D on a :

$$G_F^K = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \hat{x}$$

où  $x_i, y_i$  sont les coordonnées du sommet  $S_i$  de la face  $F$ .

**Construction de l'espace d'approximation  $V_h$**  Nous allons construire une base de  $V_h$ , constituée de fonctions continues sur  $\Omega$ . En effet,  $V_h$  est un sous-espace vectoriel de  $H^1(\Omega)$ . Nous utilisons des éléments finis de type  $\mathcal{P}^p$  et donc nous considérons des fonctions polynomiales de degrés  $\leq p$  pour chaque élément telles que :

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega), v|_K \in \mathcal{P}^p(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

Une base de cet espace est donnée par les fonctions de Lagrange  $(\Phi_i)_{i=1, NP_h}$  qui vérifient :

$$\begin{cases} \Phi_i(P_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1 \dots NP_h \\ \Phi_i|_K \in \mathcal{P}_p(K), \forall i = 1 \dots NP_h \end{cases}$$

où  $NP_h$  est le nombre de degrés de liberté associés au maillage  $\mathcal{T}_h$ . Cet espace est donc de dimension  $NP_h$  et toute fonction  $v$  de  $V_h$  vérifie :

$$v(x) = \sum_{i=1}^{NP_h} v(P_i) \Phi_i(x)$$

ce qui montre que les composantes de  $v$  dans cette base coïncident avec ses degrés de liberté.

Remarquons que le support de la fonction  $\Phi_i$  est uniquement constitué des éléments contenant le point  $P_i$  (voir figure 5). Autrement dit, **les seules fonctions de base non nulles sur un élément  $K$  sont les fonctions associées aux degrés de liberté de l'élément  $K$** . Cette propriété nous permet de définir les fonctions de base élément par élément à partir de fonctions de base  $\hat{\Phi}_i$  définies sur l'élément de référence  $\hat{K}$ . Les fonctions de base  $\hat{\Phi}_i$  sont définies par :

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_i(\hat{P}_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1 \dots \hat{N}_p \\ \hat{\Phi}_i|_{\hat{K}} \in \mathcal{P}_p(\hat{K}), \forall i = 1 \dots \hat{N}_p \end{cases}$$

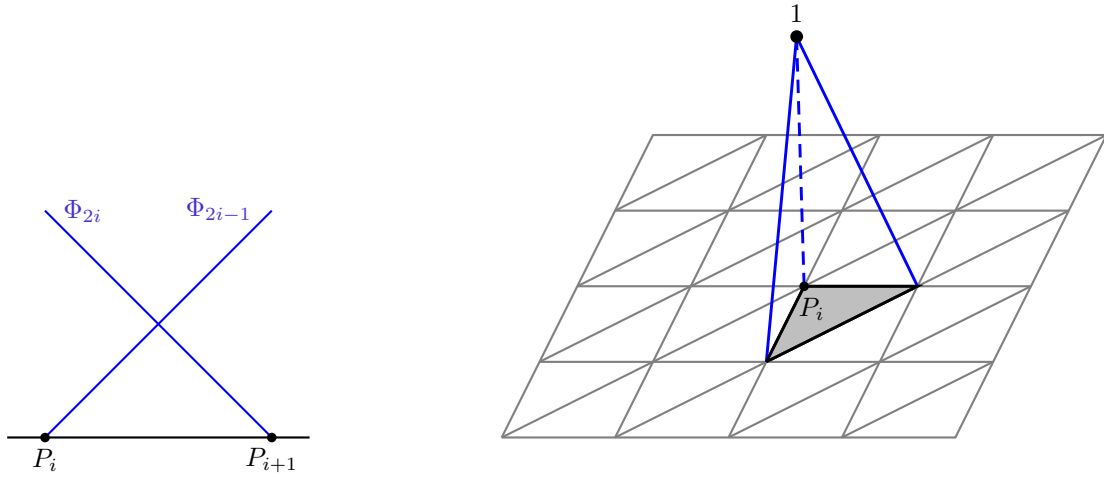
où  $\hat{N}_p$  est le nombre de liberté de  $\hat{K}$ .

– En 1D, les fonctions de base  $\mathcal{P}_1$  sont données par (voir figure 6) :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1(\hat{x}) &= 1 - \hat{x} \\ \hat{\Phi}_2(\hat{x}) &= \hat{x}, \end{aligned}$$

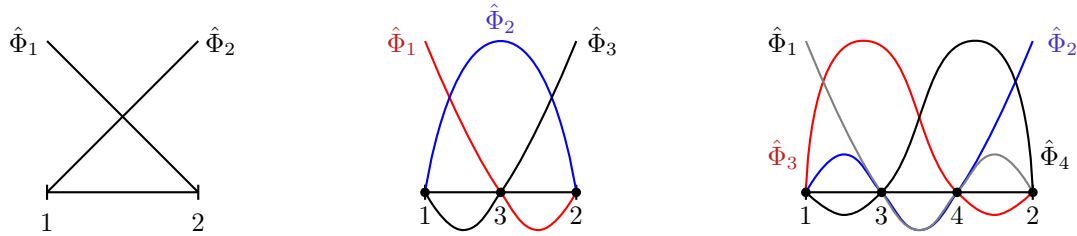
les fonctions de base  $\mathcal{P}_2$  sont données par :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1(\hat{x}) &= 2(1 - \hat{x})\left(\frac{1}{2} - \hat{x}\right) \\ \hat{\Phi}_2(\hat{x}) &= 2\hat{x}\left(\hat{x} - \frac{1}{2}\right) \\ \hat{\Phi}_3(\hat{x}) &= 4\hat{x}(1 - \hat{x}) \end{aligned}$$

FIGURE 5 – La fonction  $\Phi_i$  et son support en 1D et 2D

et les fonctions de base  $\mathcal{P}_3$  sont données par :

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_1(\hat{x}) &= \frac{9}{2}(1-\hat{x})\left(\frac{1}{3}-\hat{x}\right)\left(\frac{2}{3}-\hat{x}\right) \\ \hat{\Phi}_2(\hat{x}) &= \frac{9}{2}\hat{x}\left(\hat{x}-\frac{1}{3}\right)\left(\hat{x}-\frac{2}{3}\right) \\ \hat{\Phi}_3(\hat{x}) &= \frac{27}{2}\hat{x}(1-\hat{x})\left(\frac{2}{3}-\hat{x}\right) \\ \hat{\Phi}_4(\hat{x}) &= \frac{27}{2}\hat{x}(1-\hat{x})\left(\hat{x}-\frac{1}{3}\right).\end{aligned}$$

FIGURE 6 – Fonctions de base  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  en 1D

– En 2D, les fonctions de base  $\mathcal{P}_1$  sont données par :

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= (1-\hat{x}-\hat{y}) \\ \hat{\Phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x} \\ \hat{\Phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y},\end{aligned}$$

les fonctions de base  $\mathcal{P}_2$  sont données par :

$$\hat{\Phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) = 2(1-\hat{x}-\hat{y})\left(\frac{1}{2}-\hat{x}-\hat{y}\right)$$



$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= 2\hat{x}(\hat{x} - \frac{1}{2}) \\
\hat{\Phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= 2\hat{y}(\hat{y} - \frac{1}{2}) \\
\hat{\Phi}_4(\hat{x}, \hat{y}) &= 4\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y}) \\
\hat{\Phi}_5(\hat{x}, \hat{y}) &= 4\hat{x}\hat{y} \\
\hat{\Phi}_6(\hat{x}, \hat{y}) &= 4\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y})
\end{aligned}$$

et les fonctions de base  $\mathcal{P}_3$  sont données par :

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{9}{2}(1 - \hat{x} - \hat{y})(\frac{1}{3} - \hat{x} - \hat{y})(\frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y}) \\
\hat{\Phi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{9}{2}\hat{x}(\hat{x} - \frac{1}{3})(\hat{x} - \frac{2}{3}) \\
\hat{\Phi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{9}{2}\hat{y}(\hat{y} - \frac{1}{3})(\hat{y} - \frac{2}{3}) \\
\hat{\Phi}_4(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{27}{2}\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y})(\frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y}) \\
\hat{\Phi}_5(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{27}{2}\hat{x}(\hat{x} - \frac{1}{3})(1 - \hat{x} - \hat{y}) \\
\hat{\Phi}_6(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{27}{2}\hat{x}\hat{y}(\hat{x} - \frac{1}{3}) \\
\hat{\Phi}_7(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{27}{2}\hat{x}\hat{y}(\hat{y} - \frac{1}{3}) \\
\hat{\Phi}_8(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{27}{2}\hat{y}(\hat{y} - \frac{1}{3})(1 - \hat{x} - \hat{y}) \\
\hat{\Phi}_9(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{27}{2}\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y})(\frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y}) \\
\hat{\Phi}_{10}(\hat{x}, \hat{y}) &= 27\hat{x}\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y})
\end{aligned}$$

Les fonctions de base globales  $\Phi_i$  sont alors définies à l'aide des fonctions  $F_K$  par :

$$\begin{cases} \Phi_i|_K = \hat{\Phi}_j \circ F_K^{-1}, \text{ avec } j \text{ tel que } i = lg_{j,K} \text{ si } P_i \in K \\ \Phi_i|_K = 0 \text{ si } P_i \notin K \end{cases}$$

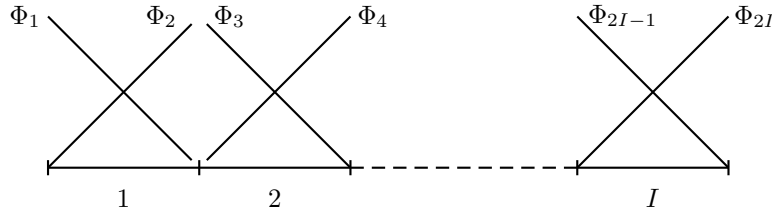
où  $lg$  est la fonction permettant le passage de la numérotation locale  $j$  à la numérotation globale  $i$ .

Passons maintenant au calcul des différentes matrices du schéma.

**Calcul de la matrice de masse  $\mathcal{M}$  :** Nous allons tout d'abord nous placer en dimension 1 afin d'expliquer pourquoi la matrice de masse  $\mathcal{M}$  est diagonale par blocs. Prenons les mêmes notations que précédemment et représentons les fonctions P1 de base notées  $\Phi_i$  sur chaque élément du maillage (voir figure 7 ).

Nous sommes en dimension 1. Par conséquent  $\Omega = [0, L]$  et :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{ij} &= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \Phi_i \Phi_j \\
&= \int_0^L \frac{1}{\mu} \Phi_i \Phi_j = \sum_{K=1}^I \int_K \frac{1}{\mu} \Phi_i \Phi_j
\end{aligned}$$

FIGURE 7 – Fonctions de base  $P_1$  en 1D

Remarquons que les termes non nuls sur chaque maille  $K$  sont :  $\mathcal{M}_{2K,2K}$ ,  $\mathcal{M}_{2K-1,2K-1}$ ,  $\mathcal{M}_{2K,2K-1}$  et  $\mathcal{M}_{2K-1,2K}$ . En effet, si les supports de  $\Phi_i$  et  $\Phi_j$  sont disjoints alors  $\mathcal{M}_{ij} = 0$ , sinon si  $\Phi_i$  et  $\Phi_j$  ont pour support l'élément  $K$  alors  $\mathcal{M}_{ij} = \int_K \frac{1}{\mu} \Phi_i \Phi_j$ .  $\mathcal{M}$  est donc diagonale par blocs avec des blocs de taille 2 :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{1,1} & \mathcal{M}_{1,2} & & & 0 \\ \mathcal{M}_{2,1} & \mathcal{M}_{2,2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathcal{M}_{2I-1,2I-1} & \mathcal{M}_{2I-1,2I} \\ 0 & & & \mathcal{M}_{2I,2I-1} & \mathcal{M}_{2I,2I} \end{pmatrix}$$

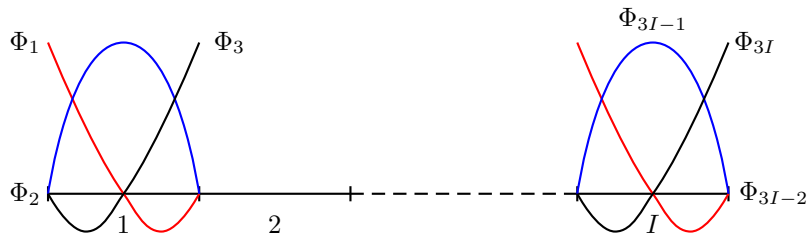
De plus, en utilisant les éléments de référence présentés plus haut, on observe :

$$\int_K \frac{1}{\mu} \Phi_i \Phi_j = \int_K \frac{\hat{1}}{\mu} \circ F_K^{-1} \hat{\Phi}_I \circ F_K^{-1} \hat{\Phi}_J \circ F_K^{-1} = \int_0^1 |\det J_{F_K}| \frac{\hat{1}}{\mu} \hat{\Phi}_I \hat{\Phi}_J = |\det A_K| \int_0^1 \frac{\hat{1}}{\mu} \hat{\Phi}_I \hat{\Phi}_J$$

Par conséquent, si  $\frac{1}{\mu}$  est une fonction constante par maille, les blocs de la matrice de masse  $\mathcal{M}$  sont proportionnels entre eux. C'est pratique pour le calcul car on n'aura qu'un seul bloc à inverser.

$$\mathcal{M}_{ij} = \sum_{K=1}^I |\det A_K| \frac{1}{\mu_K} \int_0^1 \hat{\Phi}_I \hat{\Phi}_J$$

Maintenant, si on prend des polynômes de degré 2, on a trois fonctions de base (voir figure 8).

FIGURE 8 – Fonctions de base  $P_2$  en 1D

Ici, sur chaque maille, on a 9 termes non nuls :  $\mathcal{M}_{3K,3K}, \mathcal{M}_{3K,3K-1}, \dots, \mathcal{M}_{3K-2,3K-2}$ . La matrice de masse  $\mathcal{M}$  est donc diagonale par blocs avec des blocs de taille 3 :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{1,1} & \mathcal{M}_{1,2} & \mathcal{M}_{1,3} & & & & & & 0 \\ \mathcal{M}_{2,1} & \mathcal{M}_{2,2} & \mathcal{M}_{2,3} & & & & & & \\ \mathcal{M}_{3,1} & \mathcal{M}_{3,2} & \mathcal{M}_{3,3} & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \mathcal{M}_{3I-2,3I-2} & \mathcal{M}_{3I-2,3I-1} & \mathcal{M}_{3I-2,3I} & & \\ & & & & \mathcal{M}_{3I-1,3I-2} & \mathcal{M}_{3I-1,3I-1} & \mathcal{M}_{3I-1,3I} & & \\ & & & & \mathcal{M}_{3I,3I-2} & \mathcal{M}_{3I,3I-1} & \mathcal{M}_{3I,3I} & & \\ 0 & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Faisons de même pour les polynômes de degré 3 : on a 4 fonctions de base (voir figure 9).

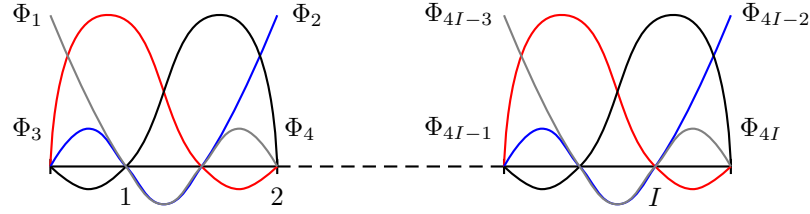


FIGURE 9 – Fonctions de base  $P_3$  en 1D

Comme précédemment, on aura 16 termes non nuls par maille et on obtiendra donc que  $\mathcal{M}$  est diagonale par blocs avec des blocs de taille 4.

Nous avons donc vu pourquoi  $\mathcal{M}$  est diagonale par blocs. Si l'on se replace dans le cas général (autre que 1D) on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ij} &= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \Phi_i \Phi_j \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\mu} \Phi_i \Phi_j \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \text{supp}(\Phi_i \cap \Phi_j) = \emptyset \\ |\det A_K| \int_{\hat{K}} \frac{1}{\mu} \hat{\Phi}_I \hat{\Phi}_J & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

#### 6.1.4 Calcul de la matrice de raideur $K$

Passons maintenant au calcul de la matrice de raideur  $\mathcal{K}$ . Nous supposons ici que la densité est constante par maille.

Rappelons que :

$$\begin{aligned} K_{ij} &= a(\Phi_i, \Phi_j) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \left( [[\Phi_i]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_j \right\} \right\} + \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_i \right\} \right\} [[\Phi_j]] \right) + \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \gamma [[\Phi_i]] [[\Phi_j]] \end{aligned}$$

$$- \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left( [[\Phi_i]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_j \right\} \right\} + \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_i \right\} \right\} [[\Phi_j]] \right) + \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \gamma [[\Phi_i]] [[\Phi_j]]$$

En utilisant toujours le fait que :

$$\Phi_i|_K = \hat{\Phi}_I \circ F_K^{-1} \text{ et } \Phi_j|_K = \hat{\Phi}_J \circ F_K^{-1}$$

nous en déduisons que,

$$\nabla \Phi_i|_K = (J_{F_K}^{-1})^T \nabla \hat{\Phi}_I \circ F_K^{-1} \text{ et } \nabla \Phi_j|_K = (J_{F_K}^{-1})^T \nabla \hat{\Phi}_J \circ F_K^{-1}$$

De fait,

$$\begin{aligned} \int_K \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j &= \frac{1}{\rho_K} \int_K (\nabla \Phi_i)^T \nabla \Phi_j \\ &= \frac{1}{\rho_K} \int_K (A_K^{-1} \nabla \hat{\Phi}_I \circ F_K^{-1})^T A_K^{-1} \nabla \hat{\Phi}_J \circ F_K^{-1} \\ &= |\det A_K| \frac{1}{\rho_K} \int_{\hat{K}} \nabla \hat{\Phi}_I^T (A_K^{-1})^T A_K^{-1} \nabla \hat{\Phi}_J \end{aligned}$$

Nous pouvons noter que pour cette matrice, nous avons dans l'intégrale sur l'élément de référence le terme  $(A_K^{-1})^T A_K^{-1}$  qui dépend de  $K$ . En posant  $C_K = (A_K^{-1})^T A_K^{-1}$ , on vérifie assez facilement en 2D que,

$$\begin{aligned} \nabla \hat{\Phi}_I^T (A_K^{-1})^T A_K^{-1} \nabla \hat{\Phi}_J &= C_{1,1}^K \frac{\partial \hat{\Phi}_I}{\partial x} \frac{\partial \hat{\Phi}_J}{\partial x} + C_{1,2}^K \left( \frac{\partial \hat{\Phi}_I}{\partial x} \frac{\partial \hat{\Phi}_J}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Phi}_I}{\partial y} \frac{\partial \hat{\Phi}_J}{\partial x} \right) \\ &+ C_{2,2}^K \frac{\partial \hat{\Phi}_I}{\partial y} \frac{\partial \hat{\Phi}_J}{\partial y} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_K} \int_K (\nabla \Phi_i)^T \nabla \Phi_j &= |\det A_K| \frac{1}{\rho_K} \left[ C_{1,1}^K \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\Phi}_I}{\partial x} \frac{\partial \hat{\Phi}_J}{\partial x} + C_{1,2}^K \int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial \hat{\Phi}_I}{\partial x} \frac{\partial \hat{\Phi}_J}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Phi}_I}{\partial y} \frac{\partial \hat{\Phi}_J}{\partial x} \right) \right. \\ &\left. + C_{2,2}^K \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\Phi}_I}{\partial y} \frac{\partial \hat{\Phi}_J}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

Nous avons donc pour le premier terme de  $\mathcal{K}$  des intégrales locales, uniquement dépendantes de l'élément de référence. Passons maintenant aux intégrales combinant saut et moyenne. On a :

$$\begin{aligned} \int_F \left( [[\Phi_i]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_j \right\} \right\} + \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_i \right\} \right\} [[\Phi_j]] \right) &= \frac{1}{2} \int_F \left[ (\Phi_i^+ \cdot n^+ + \Phi_i^- \cdot n^-) \left( \frac{1}{\rho_{K^+}} \nabla \Phi_j^+ + \frac{1}{\rho_{K^-}} \nabla \Phi_j^- \right) \right. \\ &+ \left. (\Phi_j^+ \cdot n^+ + \Phi_j^- \cdot n^-) \left( \frac{1}{\rho_{K^+}} \nabla \Phi_i^+ + \frac{1}{\rho_{K^-}} \nabla \Phi_i^- \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_F \left[ \frac{1}{\rho_{K^+}} \Phi_i^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_j^+ + \frac{1}{\rho_{K^-}} \Phi_i^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_j^- \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\rho_{K^-}} \Phi_i^- n^- \cdot \nabla \Phi_j^- + \frac{1}{\rho_{K^+}} \Phi_i^- n^- \cdot \nabla \Phi_j^+ \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\rho_{K^+}} \Phi_j^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_i^+ + \frac{1}{\rho_{K^-}} \Phi_j^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_i^- \\
& + \frac{1}{\rho_{K^-}} \Phi_j^- n^- \cdot \nabla \Phi_i^- + \frac{1}{\rho_{K^+}} \Phi_j^- n^- \cdot \nabla \Phi_i^+ \Big]
\end{aligned}$$

Notons que les intégrales sont calculées en deux fois ; une fois lorsque l'on se trouve sur  $K^+$  et une autre fois sur  $K^-$ . C'est pourquoi nous ne calculons que quatre contributions (en rouge), le reste étant calculé lors du passage sur le voisin. On calcule alors les intégrales :

$$\int_F \frac{1}{\rho_{K^+}} [\Phi_i^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_j^+ + \Phi_j^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_i^+]$$

puis les deux intégrales suivantes :

$$\frac{1}{\rho_{K^+}} \int_F \Phi_j^- n^- \cdot \nabla \Phi_i^+ = -\frac{1}{\rho_{K^+}} \int_F \Phi_j^- n^+ \cdot \nabla \Phi_i^+$$

et

$$\frac{1}{\rho_{K^-}} \int_F \Phi_i^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_j^- = -\frac{1}{\rho_{K^-}} \int_F \Phi_i^+ n^- \cdot \nabla \Phi_j^-$$

Pour le calcul des intégrales de bord de  $\mathcal{K}$ , on utilise le fait que :

$$\Phi_i|_K = \hat{\Phi}_I \circ G_F^{K^{-1}} \quad \text{et} \quad \Phi_j|_K = \hat{\Phi}_J \circ G_F^{K^{-1}}$$

et pour une arête,

$$\int_F f \circ G_F^{K^{-1}} = \int_{\hat{F}} \|\nabla G_F^{K^{-1}}\| \hat{f} = h_{K,F} \int_{\hat{F}} \hat{f}$$

où  $h_{K,F}$  est la longueur de l'arête  $F$  de l'élément  $K$ .

On a alors pour des arêtes internes :

$$\begin{aligned}
\int_F \frac{1}{\rho_{K^+}} \Phi_i^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_j^+ &= \frac{h_{K,F} (A_K^{-1})^T}{\rho_{K^+}} n^+ \cdot \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I^+ \nabla \hat{\Phi}_J^+ \\
\int_F \frac{1}{\rho_{K^-}} \Phi_i^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_j^- &= \frac{h_{K,F} (A_K^{-1})^T}{\rho_{K^-}} n^+ \cdot \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I^+ \nabla \hat{\Phi}_J^- \\
\int_F \frac{1}{\rho_{K^+}} \Phi_j^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_i^+ &= \frac{h_{K,F} (A_K^{-1})^T}{\rho_{K^+}} n^+ \cdot \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_J^+ \nabla \hat{\Phi}_I^+ \\
\int_F \frac{1}{\rho_{K^+}} \Phi_j^- n^- \cdot \nabla \Phi_i^+ &= \frac{h_{K,F} (A_K^{-1})^T}{\rho_{K^+}} n^- \cdot \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_J^- \nabla \hat{\Phi}_I^+ \\
&= -\frac{h_{K,F} (A_K^{-1})^T}{\rho_{K^+}} n^+ \cdot \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_J^- \nabla \hat{\Phi}_I^+
\end{aligned}$$

et pour une arête de 'Dirichlet', on ne calcule que les contributions sur  $K^+$  soit,

$$\begin{aligned}
\int_F \frac{1}{\rho_{K^+}} \Phi_i^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_j^+ &= \frac{h_{K,F} (A_K^{-1})^T}{\rho_{K^+}} n^+ \cdot \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I^+ \nabla \hat{\Phi}_J^+ \\
\int_F \frac{1}{\rho_{K^+}} \Phi_j^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_i^+ &= \frac{h_{K,F} (A_K^{-1})^T}{\rho_{K^+}} n^+ \cdot \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_J^+ \nabla \hat{\Phi}_I^+
\end{aligned}$$

Enfin, le calcul des intégrales de saut donne,

$$\int_F \gamma_K [[\Phi_i]] [[\Phi_j]] = \gamma_K \int_F [\Phi_i^+ n^+ . \Phi_j^+ n^+ + \Phi_i^+ n^+ . \Phi_j^- n^- + \Phi_i^- n^- . \Phi_j^+ n^+ + \Phi_i^- n^- . \Phi_j^- n^-]$$

mais on ne calcule que les deux termes suivants, tout comme l'on a fait pour les intégrales combinant saut et moyenne. On doit alors calculer, lorsque l'on est sur  $K^+$  :

$$\int_F \Phi_i^+ n^+ . \Phi_j^+ n^+ \quad \text{et} \quad \int_F \Phi_i^+ n^+ . \Phi_j^- n^- = - \int_F \Phi_i^+ n^- . \Phi_j^- n^-$$

et pour une arête de 'Dirichlet', on ne calcule que la contribution sur  $K^+$ , soit :

$$\int_F \Phi_i^+ n^+ . \Phi_j^+ n^+$$

Ceci nous amène à calculer sur l'élément de référence en 2D :

$$\begin{aligned} \int_F \Phi_i^+ n^+ . \Phi_j^+ n^+ &= (A_K^{-1})^T \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I^+ \hat{\Phi}_J^+ \\ \int_F \Phi_i^+ n^+ . \Phi_j^- n^- &= -(A_K^{-1})^T \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I^+ \hat{\Phi}_J^- \end{aligned}$$

### 6.1.5 Calcul de la matrice d'amortissement

La matrice d'amortissement est définie telle que :

$$\mathcal{B}_{i,j} = \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{abs}} \int_{F \cap \Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\rho \mu}} \Phi_i . \Phi_j = \sum_{F \in \Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\rho_F \mu_F}} \int_F \Phi_i . \Phi_j$$

Cette matrice est nulle partout sauf pour les éléments ayant au moins une arête absorbante. Par passage sur l'élément de référence, on obtient que pour toute arête absorbante :

$$\int_F \Phi_i . \Phi_j = h_{K,F} \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_i . \hat{\Phi}_j$$

Nous en avons fini avec le calcul mathématique des différentes matrices. Nous verrons par la suite la construction algorithmique.

### 6.1.6 Discrétisation en temps

Après avoir vu la discrétisation en espace, regardons la discrétisation en temps de l'équation (17). La construction du schéma en temps d'ordre 2 repose sur des développements de Taylor d'ordre 3 ou 4. Pour le calcul de la dérivée première, il existe  $\xi_{1+} \in ]t, t + \Delta t[$  et  $\xi_{1-} \in ]t - \Delta t, t[$ ; considérons alors le développement de Taylor-Lagrange d'ordre 3 suivant :

$$u_{h,i}(t + \Delta t) = u_{h,i}(t) + \Delta t \frac{\partial u_{h,i}(t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u_{h,i}(t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u_{h,i}(\xi_{1+})}{\partial t^3} \quad (35)$$

$$u_{h,i}(t - \Delta t) = u_{h,i}(t) - \Delta t \frac{\partial u_{h,i}(t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u_{h,i}(t)}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u_{h,i}(\xi_{1-})}{\partial t^3} \quad (36)$$

En soustrayant (36) à (35), on obtient qu'il existe  $\xi_1 \in ]t - \Delta t, t + \Delta t[$  tel que :

$$\frac{u_{h,i}(t + \Delta t) - u_{h,i}(t - \Delta t)}{2\Delta t} = \frac{\partial u_{h,i}(t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u_{h,i}(\xi_1)}{\partial t^3}$$

On a donc, par approximation :

$$\frac{u_{h,i}^{n+1} - u_{h,i}^{n-1}}{2\Delta t} \simeq \frac{\partial u_{h,i}}{\partial t}(t^n) \quad (37)$$

où  $t^n = n\Delta t$  et  $u_{h,i}^n$  est l'approximation de  $u_{h,i}(t^n)$ .

De même, pour la dérivée d'ordre 2, il existe  $\xi_{2+} \in ]t, t + \Delta t[$  et  $\xi_{2-} \in ]t - \Delta t, t[$ ; considérons alors le développement de Taylor-Lagrange d'ordre 4 suivant :

$$u_{h,i}(t + \Delta t) = u_{h,i}(t) + \Delta t \frac{\partial u_{h,i}(t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u_{h,i}(t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u_{h,i}(t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u_{h,i}(\xi_{2+})}{\partial t^4} \quad (38)$$

$$u_{h,i}(t - \Delta t) = u_{h,i}(t) - \Delta t \frac{\partial u_{h,i}(t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u_{h,i}(t)}{\partial t^2} - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u_{h,i}(t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u_{h,i}(\xi_{2-})}{\partial t^4} \quad (39)$$

En additionnant (38) à (39), il vient qu'il existe  $\xi_2 \in ]t - \Delta t, t + \Delta t[$  tel que :

$$\frac{u_{h,i}(t + \Delta t) + u_{h,i}(t - \Delta t) - 2u_{h,i}(t)}{\Delta t^2} = \frac{\partial^2 u_{h,i}(t)}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u_{h,i}(\xi_2)}{\partial t^4}$$

On a donc, par approximation :

$$\frac{u_{h,i}^{n+1} + u_{h,i}^{n-1} - 2u_{h,i}^n}{\Delta t^2} \simeq \frac{\partial^2 u_{h,i}(t^n)}{\partial t^2} \quad (40)$$

On obtient alors au final le schéma en espace et en temps suivant :

$$\mathcal{M} \frac{U_h^{n+1} + U_h^{n-1} - 2U_h^n}{\Delta t^2} + \mathcal{B} \frac{U_h^{n+1} - U_h^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{K} U_h^n = \mathcal{F}_h$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\left( I + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{B} \right) U_h^{n+1} = (2 - \Delta t^2 \mathcal{M}^{-1} \mathcal{K}) U_h^n + \left( \frac{\Delta t}{2} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{B} - 1 \right) U_h^{n-1} + \Delta t^2 \mathcal{M}^{-1} \mathcal{F}_h \quad (41)$$

où  $U_h^n$  est une approximation de  $U_h(t^n)$ . Le schéma est stable sous une condition CFL dépendant du paramètre  $\gamma$ .

## 7 Contribution personnelle et résultats

L'équipe *Magique-3D* utilise des vitesses constantes par maille dans différents codes de simulation DG : un code Matlab en 1D et des codes Fortran 2D et 3D. Dans une première partie, nous expliquerons les limites des vitesses constantes par maille et pourquoi nous envisageons des vitesses polynomiales par maille. Nous expliciterons également son implémentation dans le code. Ensuite, dans une seconde partie, nous présenterons les différentes expériences effectuées ainsi que les résultats obtenus pour le code Matlab 1D et Fortran 2D.

## 7.1 Prise en compte de variations polynomiales

Nous étudions l'équation des ondes acoustique (comme nous l'avons présenté précédemment) sans conditions aux limites absorbantes. Le code Matlab original permettait de résoudre l'équation en 1D avec des vitesses constantes par maille, c'est-à-dire que  $c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  est constant sur chaque subdivision de l'intervalle  $[0, L]$  à étudier. Dans la réalité, la vitesse n'est pas constante par maille. Par conséquent, le code s'adapte, c'est-à-dire qu'il prend la valeur de la vitesse au milieu de la subdivision et l'attribue à toute la maille. Prenons un exemple en 1D pour illustrer et notons  $c^*$  la vitesse considérée par le code (voir figure 10). Nous supposons que la vitesse réelle est telle que  $c(x) = \sin(x)$ .

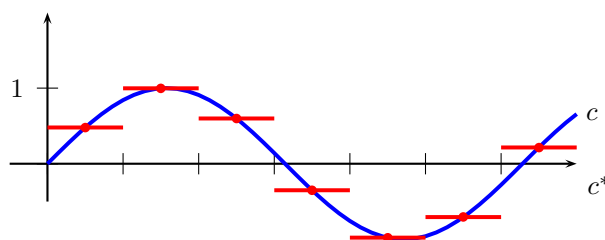


FIGURE 10 – Exemple de vitesse constante par maille en 1D

Maintenant prenons des subdivisions plus petites (voir figure 11).

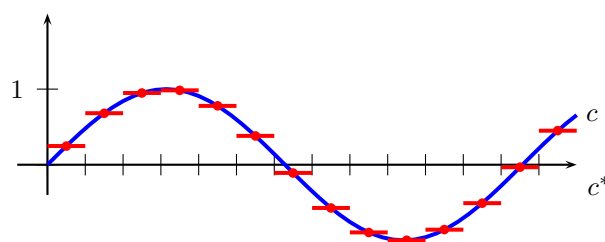


FIGURE 11 – Exemple de vitesse constante par maille en 1D

On remarque que plus les mailles sont fines, plus la vitesse constante par maille est proche de la vraie vitesse et plus les résultats sont exacts. Cependant, le temps de calcul est allongé car on doit utiliser un grand nombre de mailles. C'est une des raisons qui nous ont poussés à faire des vitesses polynomiales par maille. En effet, nous espérons ainsi travailler avec des subdivisions plus grandes et donc optimiser le temps de calcul.

Dans un premier temps nous rappellerons le principe d'interpolation de Lagrange que nous utiliserons pour approcher la vitesse, puis nous détaillerons les changements, d'un point de vue



algorithmique, que les vitesses polynomiales impliquent dans la construction de la matrice de masse et de rigidité.

### 7.1.1 Principe : interpolation de Lagrange

On va donc implémenter dans un premier temps des vitesses linéaires par maille puis polynomiales d'ordre 2 par maille (on dira par la suite polynomiales par maille).

Pour cela, nous allons utiliser l'interpolation de Lagrange. Pour implémenter des vitesses linéaires par maille, nous allons prendre la valeur exacte de la vitesse en début et en fin de maille (en 1D) ou alors aux trois sommets  $S_1, S_2, S_3$  (en 2D), puis nous allons interpoler. Ce qui donne en reprenant l'exemple précédent :

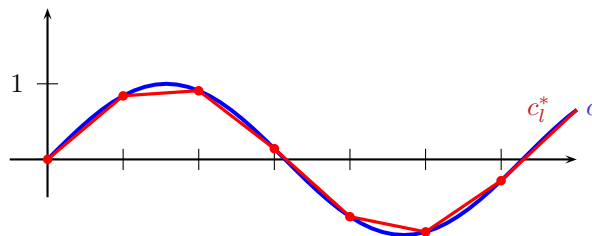


FIGURE 12 – Exemple de vitesse linéaire par maille en 1D

De même, plus on raffine le maillage, plus l'interpolation s'approche de la réalité. On peut alors observer que  $c_l^*$ , l'approximation linéaire de la vitesse, s'approche plus rapidement de  $c$  que  $c^*$  (la vitesse constante par maille).

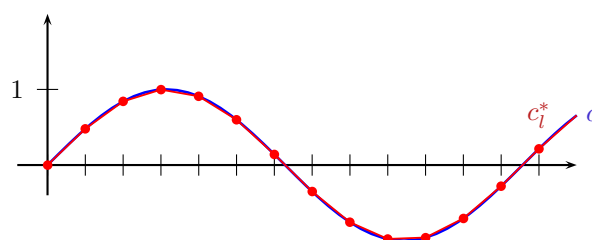


FIGURE 13 – Exemple de vitesse linéaire par maille en 1D

En termes plus mathématiques, l'approximation linéaire de Lagrange s'utilise comme suit en 1D :

$$L(X) = y_i l_0(X) + y_{i+1} l_1(X)$$

où  $(x_i, y_i)$  désigne les coordonnées exactes de la vitesse en début et fin de maille (voir figure 14) et :

$$\begin{aligned} l_0(X) &= \frac{X - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \\ l_1(X) &= \frac{X - x_i}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned}$$

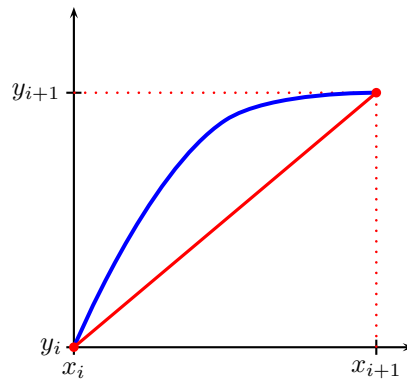


FIGURE 14 – Approximation de Lagrange en 1D

Voyons ce qui se passe en 2D pour l'approximation linéaire de la vitesse. Prenons par exemple une vitesse qui vaut 1 en deux des sommets d'une maille et 2 au dernier. L'approximation linéaire est alors le plan qui passe par les trois points (voir figure 15).

L'approximation linéaire en un point donné  $(x, y)$  est alors définie par :

$$V(x, y) = v_1 \Phi_1(x, y) + v_2 \Phi_2(x, y) + v_3 \Phi_3(x, y)$$

où  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  sont les fonctions de base  $P1$  sur la maille et  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  sont les valeurs des vitesses prises aux sommets  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ .

Voyons à présent l'approximation polynomiale de la vitesse. Cette fois-ci, en 1D, il nous faut trois points pour la vitesse qui sont en début, milieu et fin de maille. En reprenant l'exemple 1D, on a la figure 16.

Ici j'ai pris des mailles deux fois plus grandes pour qu'on puisse différencier l'approximation de l'exacte. Maintenant, si on prend des maille de taille 1, on a la figure 17.

Nous pouvons faire la même remarque que précédemment à savoir que  $c_p^*$ , l'approximation polynomiale de la vitesse, approche mieux  $c$  que  $c_l^*$  ou  $c^*$ .

Rappelons que les polynômes de Lagrange prennent la forme :

$$L(X) = y_0 l_0(X) + y_1 l_1(X) + y_2 l_2(X)$$

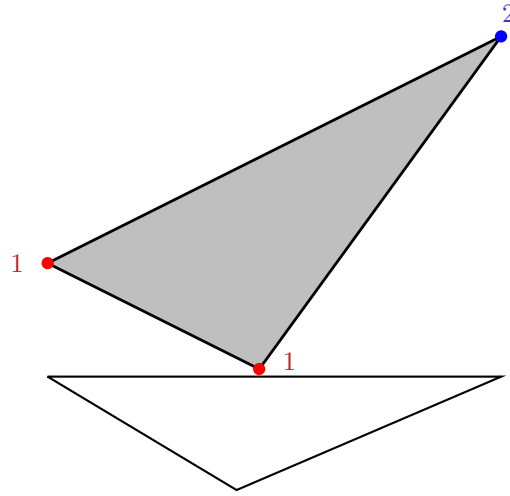


FIGURE 15 – Approximation linéaire de Lagrange en 2D

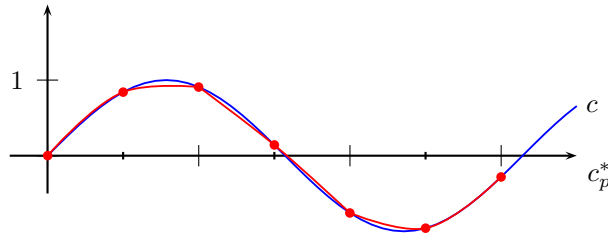


FIGURE 16 – Approximation polynomiale de Lagrange en 1D

où  $y_0$ ,  $y_1$  et  $y_2$  sont respectivement les vitesses exactes en début, milieu et fin de maille et :

$$\begin{aligned} l_0(X) &= \frac{X - x_1}{x_0 - x_1} \times \frac{X - x_2}{x_0 - x_2} \\ l_1(X) &= \frac{X - x_0}{x_1 - x_0} \times \frac{X - x_2}{x_1 - x_2} \\ l_2(X) &= \frac{X - x_0}{x_2 - x_0} \times \frac{X - x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

où  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont les coordonnées de début, milieu et fin de maille.

### 7.1.2 Calcul de la matrice de masse $\mathcal{M}$

Après avoir vu la construction générale du schéma en GD, nous allons voir sa construction d'un point de vue algorithmique. Prenons dans un premier temps la vitesse constante par maille

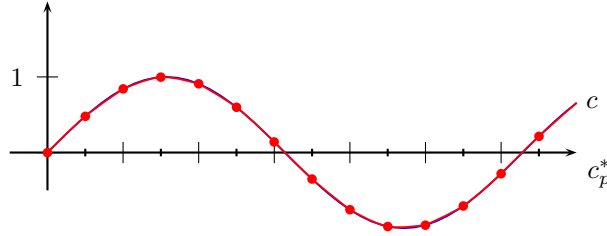


FIGURE 17 – Approximation polynomiale de Lagrange en 1D

et intéressons nous au calcul de la matrice  $\mathcal{M}$  de terme général :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{ij} &= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \Phi_i \Phi_j \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\mu_K} \Phi_i \Phi_j\end{aligned}$$

La première idée pour calculer cette matrice est, pour  $i$  et  $j$  fixés, de parcourir l'ensemble des éléments de  $\mathcal{T}_h$  :

Pour  $i = 1, NP_h$

Pour  $j = 1, NP_h$

$\mathcal{M}(i, j) = 0$

Pour  $l = 1, NT_h$

Si  $P_i \in K_l$  et  $P_j \in K_l$  alors

$$\mathcal{M}(i, j) = \mathcal{M}(i, j) + \int_{K_l} \frac{1}{\mu_K} \Phi_i \Phi_j$$

Finsi

Finpour

Finpour

Finpour

Cet algorithme présente quelques inconvénients :

1. il faut parcourir trois boucles de grandes tailles :  $NP_h \times NP_h \times NT_h$  ;
2. il faut à chaque fois savoir si les degrés de liberté  $P_i$  et  $P_j$  appartiennent à  $K_l$  ;
3. le calcul de  $\int_{K_l} \frac{1}{\mu_K} \Phi_i \Phi_j$  n'est pas simple à implémenter.

Or, rappelons que si  $P_i$  et  $P_j$  appartiennent à l'élément  $K$ , alors il existe deux degrés de liberté  $\hat{P}_I$  et  $\hat{P}_J$  sur l'élément de référence  $\hat{K}$  tels que  $l_{g_I, K} = i$  et  $l_{g_J, K} = j$  et :

$$\int_K \frac{1}{\mu} \Phi_i \Phi_j = |\det A_K| \frac{1}{\mu_K} \int_{\hat{K}} \hat{\Phi}_i \hat{\Phi}_j$$

Le calcul de  $\int_K \frac{1}{\mu_K} \Phi_i \Phi_j$  se déduit donc simplement du calcul de la matrice  $\hat{\mathcal{M}}$  de terme général  $\hat{\mathcal{M}}_{i,j} = \int_{\hat{K}} \hat{\Phi}_i \hat{\Phi}_j$  et nous utilisons alors l'algorithme de calcul suivant :

Pour  $i = 1, \hat{N}_p$

Pour  $j = 1, \hat{N}_p$

$$\hat{\mathcal{M}}_{i,j} = \int_{\hat{K}} \hat{\Phi}_i \hat{\Phi}_j$$

Finpour

Finpour

$\mathcal{M} = 0$

Pour  $l = 1, NT_h$

Calcul de  $|\det A_{K_l}|$

Pour  $I = 1, \hat{N}_p$

Pour  $J = 1, \hat{N}_p$

$$i = l_g(l, I), j = l_g(l, J)$$

$$\mathcal{M}(i, j) = \mathcal{M}(i, j) + |\det A_{K_l}| \frac{1}{\mu_K} \hat{\mathcal{M}}(I, J)$$

Finpour

Finpour

Finpour

Ce nouvel algorithme a plusieurs avantages :

1. il suffit de calculer les intégrales une seule fois sur l'élément de référence ;
2. on ne parcourt que les degrés de liberté nécessaires au calcul de  $\mathcal{M}$ , il n'y a que  $NT_h \times \hat{N}_p \times \hat{N}_p$  itérations ;
3. on déduit facilement la numérotation globale à partir de la numérotation locale grâce à la fonction  $l_g$ .

Nous allons maintenant considérer que la vitesse  $c$  n'est pas constante par maille. Pour ce qui est de la matrice de masse, les calculs vont légèrement différer de ce que nous avons présenté auparavant. En effet, nous avons supposé que la vitesse, et donc implicitement  $\frac{1}{\mu}$ , était constante par maille, ce qui nous permettait de sortir  $\frac{1}{\mu}$  de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ij} &= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \Phi_i \Phi_j \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\det A_K| \frac{1}{\mu_K} \int_{\hat{K}} \hat{\Phi}_I \hat{\Phi}_J \end{aligned}$$

Mais attention, à présent nous avons des vitesses qui varient au sein de la maille ! Nous ne pouvons donc plus sortir  $\frac{1}{\mu}$  de l'intégrale et on a donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{ij} &= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \Phi_i \Phi_j \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\mu} \Phi_i \Phi_j \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\det A_K| \int_{\hat{K}} \frac{\hat{1}}{\mu} \hat{\Phi}_I \hat{\Phi}_J\end{aligned}$$

Les blocs de la matrice de masse ne sont donc plus proportionnels entre eux, ce qui va impliquer des modifications dans l'algorithme de construction de  $\mathcal{M}$ . Voici donc les modifications que j'ai apportées dans cet algorithme :

$\mathcal{M} = 0$

Pour  $l = 1, NT_h$

Calcul de  $|\det A_{K_l}|$

Calcul de  $\frac{\hat{1}}{\mu_p}$  (l'approximation polynomiale de  $\frac{\hat{1}}{\mu}$ )

Pour  $I = 1, \hat{N}_p$

Pour  $J = 1, \hat{N}_p$

$i = l_g(l, I), j = l_g(l, J)$

$$\mathcal{M}(i, j) = \mathcal{M}(i, j) + |\det A_{K_l}| \int_{\hat{K}} \frac{\hat{1}}{\mu_p} \hat{\Phi}_I \hat{\Phi}_J$$

Finpour

Finpour

Finpour

La difficulté réside dans le calcul de l'intégrale  $\int_{\hat{K}} \frac{\hat{1}}{\mu_p} \hat{\Phi}_I \hat{\Phi}_J$ . Pour cela, faisons un petit rappel d'intégration numérique :

**Formules de quadrature et leur ordre** Notons  $g = \frac{\hat{1}}{\mu_p} \hat{\Phi}_I \hat{\Phi}_J$ . Nous devons donc calculer

une approximation de  $\int_{\hat{K}} \hat{g}$ , soit encore  $\int_0^1 g(t) dt$  en 1D.

Pour cela, nous avons la *formule de point milieu* :

$$\int_0^1 g(t) dt \approx g(1/2)$$

ou encore la *formule du trapèze* (voir figure 18) :

$$\int_0^1 g(t) dt \approx \frac{1}{2} (g(0) + g(1))$$

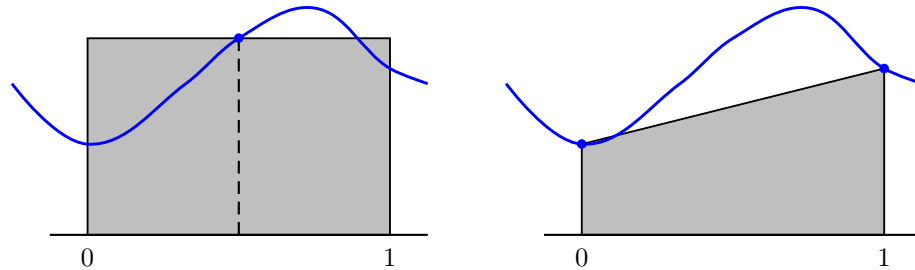


FIGURE 18 – Formule du point milieu et du trapèze

Cependant, ces deux formules (point milieu et trapèze) sont exactes si  $g(t)$  est un polynôme de degré  $\leq 1$ . On obtient la *formule de Simpson* si l'on fait passer une parabole (polynôme de degré 2) par les trois points  $(0, g(0))$ ,  $(1/2, g(1/2))$ ,  $(1, g(1))$  et si l'on approche  $\int_0^1 g(t)dt$  par l'aire sous la parabole :

$$\int_0^1 g(t)dt \approx \frac{1}{6} (g(0) + g(1/2) + g(1))$$

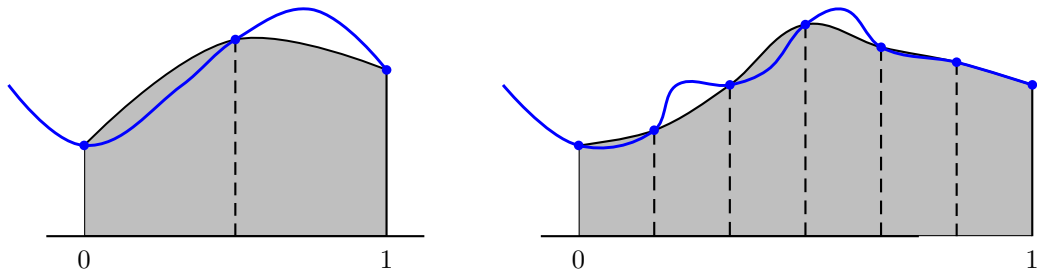


FIGURE 19 – Formule de Simpson et de Newton à 7 points

En généralisant cette idée (passer un polynôme de degré  $s - 1$  par  $s$  points équidistants  $(\frac{i}{s-1}, g(\frac{i}{s-1}))$ ,  $i = 0, \dots, s - 1$ ), on obtient les *formules de Newton-Cotes* (voir figure 19).

### Définition

Une formule de quadrature à  $s$  étages est donnée par :

$$\int_0^1 g(t)dt \approx \sum_{i=1}^s b_i g(c_i) \quad (42)$$

où  $c_i$  sont les nœuds de la formule de quadrature et les  $b_i$  en sont les poids.

### Définition

On dit que l'ordre de la formule de quadrature (42) est  $p$ , si la formule est exacte pour tous les polynômes de degré  $\leq p$ , c'est-à-dire :

$$\int_0^1 g(t)dt = \sum_{i=1}^s b_i g(c_i) \quad \text{pour } \deg g \leq p \quad (43)$$

et inexacte pour au moins un polynôme de degré  $p+1$ .

On voit que les formules du point milieu et du trapèze sont d'ordre 2. La formule de Newton-Cotes à  $s$  étages a un ordre  $p \geq s$  (par définition).

Dans le code 1D, on utilise une formule de Newton à 9 points pour calculer l'approximation de  $\int_0^1 g(t)dt$ . En effet, on considèrera des fonctions de bases de degré au plus 3 et  $\frac{1}{\mu}$  de degré au plus 2. Par conséquent, le degré de  $g$  sera d'au plus  $3+3+2=8$ . Il faut donc une formule d'ordre 9.

En 2D, c'est le même principe, on veut intégrer  $\int_{\hat{K}} g$ , où  $\hat{K}$  est le triangle de référence. Dans le code fortran, on prend donc 16 points de  $\hat{K}$  auxquels on associe des poids :

$$\int_{\hat{K}} g \approx \sum_{i=1}^{16} w_i g(x_i, y_i)$$

où  $(x_i, y_i)$  sont les nœuds de la formule de quadrature et les  $w_i$  en sont les poids (voir figure 20).

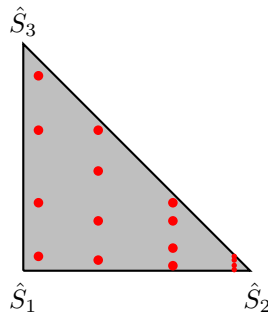


FIGURE 20 – Intégration numérique en 2D à 16 points

On prend donc la valeur aux 16 points de la fonction  $g$  que l'on multiplie par les poids correspondants, puis on somme pour obtenir l'approximation de l'intégrale de  $g$  sur le triangle de référence.

Par conséquent, pour obtenir la valeur de  $\int_{\hat{K}} \frac{\hat{1}}{\mu_p} \hat{\Phi}_I \hat{\Phi}_J$  (voir figures 21 et 22), on calcule :

1. l'approximation polynomiale de  $\frac{\hat{1}}{\mu}$



2. l'intégration numérique de  $g$ .

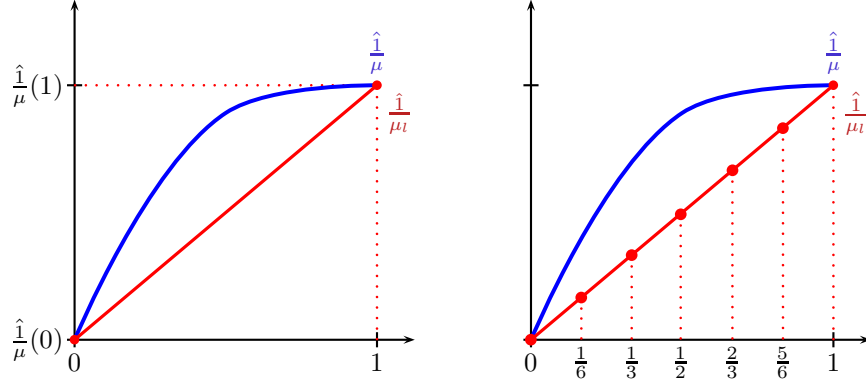


FIGURE 21 – Approximation linéaire de la vitesse en 1D

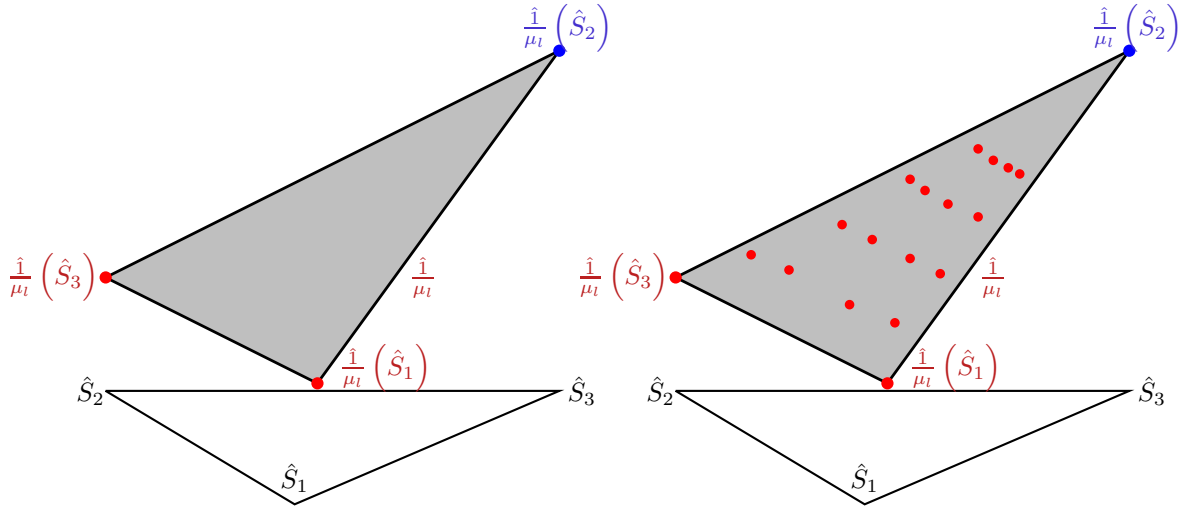


FIGURE 22 – Approximation linéaire de la vitesse en 2D

### 7.1.3 Calcul de la matrice de raideur $\mathcal{K}$

Intéressons-nous à présent à la constuction d'un point de vue algorithmique de la matrice de raideur  $\mathcal{K}$  en 1D car on n'a pas considéré la vitesse dépendant de  $\rho$  en 2D. Par soucis de clarté, nous allons subdiviser cette construction en 4 parties :

1. Calcul du terme  $\mathcal{K}_1 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j$

2. Calcul du terme  $\mathcal{K}_2 = \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} [[\Phi_i]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_j \right\} \right\} + \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F [[\Phi_i]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_j \right\} \right\}$
3. Calcul du terme  $\mathcal{K}_3 = \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} [[\Phi_j]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_i \right\} \right\} + \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F [[\Phi_j]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_i \right\} \right\}$
4. Calcul du terme  $\mathcal{K}_4 = \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_{F \cap \Gamma_D} \gamma [[\Phi_i]] [[\Phi_j]] + \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \gamma [[\Phi_i]] [[\Phi_j]]$

**Calcul de  $\mathcal{K}_1$**  Comme  $\nabla \Phi = \Phi'$ , on a simplement à calculer  $|\det A_K| \frac{C_K}{\rho_K} \int_{\hat{K}} \hat{\Phi}'_I \hat{\Phi}'_J$ .

Par conséquent, de la même manière qu'avec la matrice de masse, on utilise l'algorithme suivant :

```

Pour i = 1,  $\hat{N}_p$ 
  Pour j = 1,  $\hat{N}_p$ 
     $\hat{\mathcal{K}}(i, j) = \int_0^1 \hat{\Phi}'_I \hat{\Phi}'_J$ 
  Finpour
Finpour
 $\mathcal{K} = 0$ 
Pour l = 1,  $NT_h$ 
  Calcul de  $|\det A_{K_l}|$ 
  Pour I = 1,  $\hat{N}_p$ 
    Pour J = 1,  $\hat{N}_p$ 
      i =  $l_g(l, I)$ , j =  $l_g(l, J)$ 
       $\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) + |\det A_{K_l}| \frac{C_K}{\rho_K} \hat{\mathcal{K}}(I, J)$ 
    Finpour
  Finpour
Finpour

```

Maintenant passons en vitesse polynomiale par maille. Cela implique donc que  $\frac{1}{\rho}$  n'est pas constant sur une maille. Explicitons les modifications que ça engendre en 1D :

$$\int_K \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j = |\det A_K| C^K \int_0^1 \frac{\hat{1}}{\rho} \hat{\Phi}'_I \hat{\Phi}'_J$$

où  $C_K = (A_K^{-1})^2$  et  $|\det A_K| = A_K$ , d'où :

$$\int_K \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j = \frac{1}{A_K} \int_0^1 \frac{\hat{1}}{\rho} \hat{\Phi}'_I \hat{\Phi}'_J$$

On a donc pour l'algorithme :

$\mathcal{K} = 0$

Pour  $l = 1, NT_h$

Calcul de  $A_{K_l}$

Calcul de  $\frac{\hat{1}}{\rho_p}$  (l'approximation polynomiale de  $\frac{\hat{1}}{\rho}$ )

Pour  $I = 1, \hat{N}_p$

Pour  $J = 1, \hat{N}_p$

$i=l_g(l,I), j=l_g(l,J)$

$$\mathcal{K}(i,j) = \mathcal{K}(i,j) + \frac{1}{A_{K_l}} \int_0^1 \frac{\hat{1}}{\rho_p} \hat{\Phi}'_I \hat{\Phi}'_J$$

Finpour

Finpour

Finpour

**Calcul de  $\mathcal{K}_2$**  Nous avons vu que pour une vitesse constante par maille on avait :

$$\begin{aligned} \int_F [[\Phi_i]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_j \right\} \right\} &= \frac{1}{2} \int_F \left[ \frac{1}{\rho_{K^+}} \Phi_i^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_j^+ + \frac{1}{\rho_{K^-}} \Phi_i^- n^- \cdot \nabla \Phi_j^- \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho_{K^-}} \Phi_i^- n^- \cdot \nabla \Phi_j^- + \frac{1}{\rho_{K^+}} \Phi_i^+ n^+ \cdot \nabla \Phi_j^+ \right] \\ &= \frac{h_{K,F}(A_K^{-1})^T}{2\rho_{K^+}} n^+ \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I^+ \cdot \nabla \hat{\Phi}_J^+ + \frac{h_{K,F}(A_K^{-1})^T}{2\rho_{K^-}} n^+ \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I^+ \cdot \nabla \hat{\Phi}_J^- \\ &\quad + \frac{h_{K,F}(A_K^{-1})^T}{2\rho_{K^-}} n^- \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I^- \cdot \nabla \hat{\Phi}_J^- - \frac{h_{K,F}(A_K^{-1})^T}{2\rho_{K^+}} n^+ \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I^- \cdot \nabla \hat{\Phi}_J^+ \end{aligned}$$

Ce qui donne en 1D :

$$\begin{aligned} \int_F [[\Phi_i]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_j \right\} \right\} &= \frac{(A_K^{-1})^T}{2\rho_{K^+}} n^+ \hat{\Phi}_I(0) \cdot (\hat{\Phi}_J(0))' + \frac{(A_K^{-1})^T}{2\rho_{K^-}} n^+ \hat{\Phi}_I(0) \cdot (\hat{\Phi}_J(1))' \\ &\quad + \frac{(A_K^{-1})^T}{2\rho_{K^-}} n^- \hat{\Phi}_I(1) \cdot (\hat{\Phi}_J(1))' - \frac{(A_K^{-1})^T}{2\rho_{K^+}} n^+ \hat{\Phi}_I(1) \cdot (\hat{\Phi}_J(0))' \end{aligned}$$

Et pour le terme de bord :

$$\int_{F \cap \Gamma_D} [[\Phi_i]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_j \right\} \right\} = \frac{h_{K,F}(A_K^{-1})^T}{\rho_{K^+}} n^+ \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I(0) \cdot \nabla \hat{\Phi}_J(0)$$

Ce qui donne en 1D :

$$\int_{F \cap \Gamma_D} [[\Phi_i]] \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla \Phi_j \right\} \right\} = \frac{(A_K^{-1})^T}{\rho_{K^+}} n^+ \hat{\Phi}_I(0) \cdot (\hat{\Phi}_J(0))'$$

Par conséquent, on utilise l'algorithme suivant :

$\mathcal{K} = 0$

Pour  $l = 1, NT_h$

Calcul de  $A_{K_l}$

Pour  $I = 1, \hat{N}_p$

Pour  $J = 1, \hat{N}_p$

$i=l_g(l,I), j=l_g(l,J)$

$$\mathcal{K}(i,j) = \mathcal{K}(i,j) + \frac{(A_K^{-1})^T}{2\rho_{K+}} n^+ \hat{\Phi}_I(0). \left( \hat{\Phi}_J(0) \right)'$$

$$\mathcal{K}(i,j) = \mathcal{K}(i,j) + \frac{(A_K^{-1})^T}{2\rho_{K-}} n^+ \hat{\Phi}_I(0). \left( \hat{\Phi}_J(1) \right)'$$

$$\mathcal{K}(i,j) = \mathcal{K}(i,j) - \frac{(A_K^{-1})^T}{2\rho_{K-}} n^+ \hat{\Phi}_I(1). \left( \hat{\Phi}_J(1) \right)'$$

$$\mathcal{K}(i,j) = \mathcal{K}(i,j) - \frac{(A_K^{-1})^T}{2\rho_{K+}} n^+ \hat{\Phi}_I(1). \left( \hat{\Phi}_J(0) \right)'$$

Finpour

Finpour

Finpour

Avec des vitesses polynomiales, il suffit de remplacer  $\frac{1}{\rho_K}$  par l'approximation polynomiale de la vitesse  $\frac{1}{\rho_p}$ . On a alors l'algorithme suivant :

$\mathcal{K} = 0$

Pour  $l = 1, NT_h$

Calcul de  $A_{K_l}$

Calcul de  $\frac{\hat{1}}{\rho_p}$  (approximation polynomiale de  $\frac{1}{\rho}$ )

Pour  $I = 1, \hat{N}_p$

Pour  $J = 1, \hat{N}_p$

$i=l_g(l,I), j=l_g(l,J)$

$$\mathcal{K}(i,j) = \mathcal{K}(i,j) + \frac{(A_K^{-1})^T}{2} \frac{\hat{1}}{\rho_p}(0) n^+ \hat{\Phi}_I(0). \left( \hat{\Phi}_J(0) \right)'$$

$$\mathcal{K}(i,j) = \mathcal{K}(i,j) + \frac{(A_K^{-1})^T}{2} \frac{\hat{1}}{\rho_p}(1) n^+ \hat{\Phi}_I(0). \left( \hat{\Phi}_J(1) \right)'$$

$$\mathcal{K}(i,j) = \mathcal{K}(i,j) - \frac{(A_K^{-1})^T}{2} \frac{\hat{1}}{\rho_p}(1) n^+ \hat{\Phi}_I(1). \left( \hat{\Phi}_J(1) \right)'$$

$$\mathcal{K}(i,j) = \mathcal{K}(i,j) - \frac{(A_K^{-1})^T}{2} \frac{\hat{1}}{\rho_p}(0) n^+ \hat{\Phi}_I(1). \left( \hat{\Phi}_J(0) \right)'$$

Finpour

Finpour

Finpour

**Calcul de  $\mathcal{K}_3$**  On peut remarquer que  $\mathcal{K}_3$  est le symétrique de  $\mathcal{K}_2$  en remplaçant les  $i$  par des  $j$ . Je ne vais donc pas détailler le calcul de  $\mathcal{K}_3$ .

**Calcul de  $\mathcal{K}_4$**  Nous avons vu que pour une vitesse constante par maille on avait :

$$\int_F \gamma_K [[\phi_i]] [[\Phi_j]] = A_K^{-1} \gamma_K \int_{\hat{F}} \left( \hat{\Phi}_I(0) \hat{\Phi}_J(0) - \hat{\Phi}_I(0) \hat{\Phi}_J(1) - \hat{\Phi}_I(1) \hat{\Phi}_J(0) + \hat{\Phi}_I(1) \hat{\Phi}_J(1) \right)$$

Donc si les vitesses sont polynomiales, on a :

$$\int_F \gamma_K [[\Phi_i]] [[\Phi_j]] = A_K^{-1} \int_{\hat{F}} \gamma \left( \hat{\Phi}_I(0) \hat{\Phi}_J(0) - \hat{\Phi}_I(0) \hat{\Phi}_J(1) - \hat{\Phi}_I(1) \hat{\Phi}_J(0) + \hat{\Phi}_I(1) \hat{\Phi}_J(1) \right)$$

Par conséquent, en 1D, on a l'algorithme suivant :

$\mathcal{K} = 0$

Pour  $l = 1, NT_h$

Calcul de  $A_{K_l}$

Calcul de  $\gamma$

Pour  $I = 1, \hat{N}_p$

Pour  $J = 1, \hat{N}_p$

$i = l_g(l, I), j = l_g(l, J)$

$$\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) + A_{K_l}^{-1} \int_0^1 \gamma \hat{\Phi}_I \hat{\Phi}_J$$

Finpour

Finpour

Finpour

## 7.2 Tests et Validations

Dans un premier temps, nous allons présenter les résultats obtenus pour le cas 1D. Ensuite, nous verrons ceux dans le cas 2D.

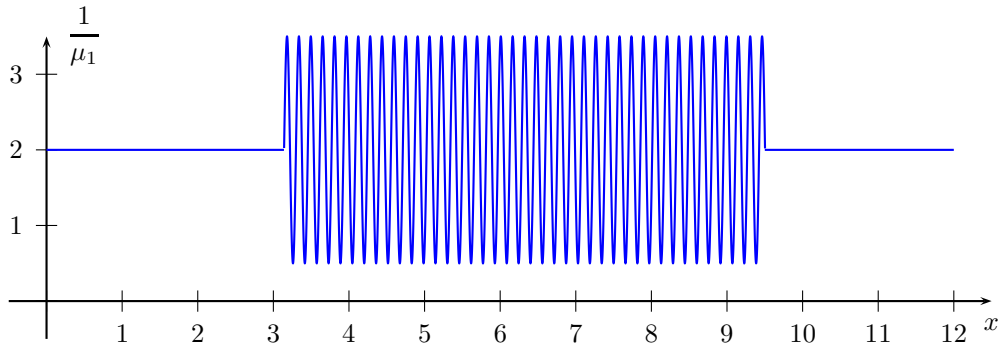
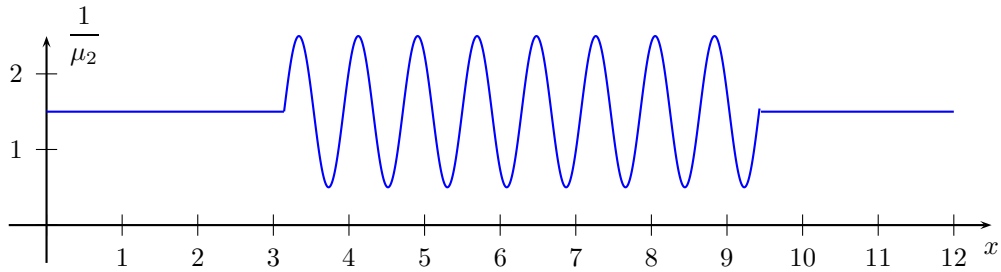
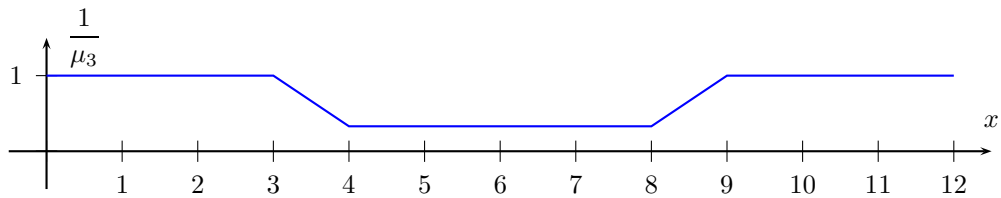
### 7.2.1 Conditions d'expérience en 1D

Nous avons fait tourner le code matlab 1D sur l'intervalle  $[0, 12]$  et avons placé un receptrer en  $x = 10$  m. Nous avons fait deux séries de tests :

1. Nous considérons que la vitesse de propagation  $c = \frac{\mu}{\rho}$  ne dépend que de  $\mu$ .
2. Nous considérons que la vitesse de propagation  $c$  ne dépend que de  $\rho$ .

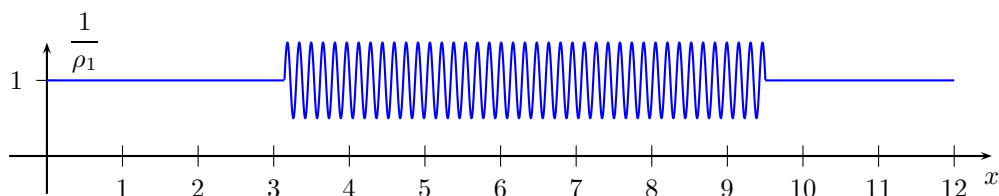
Dans le premier cas, nous avons considéré trois fonctions  $\frac{1}{\mu}$  pour les tests (voir figures 23, 24 et 25).

1.  $\frac{1}{\mu_1}(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq \pi \text{ ou } x \geq 3\pi \\ 2 + 1.5 \sin(40x) & \text{si } x \in [\pi, 3\pi] \end{cases}$  (voir figure 23 )
2.  $\frac{1}{\mu_2}(x) = \begin{cases} 1.5 & \text{si } x \leq \pi \text{ ou } x \geq 3\pi \\ 1.5 + \sin(8x) & \text{si } x \in [\pi, 3\pi] \end{cases}$  (voir figure 24 )
3.  $\frac{1}{\mu_3}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 3 \text{ ou } x \geq 9 \\ 1 - 2/3x & \text{si } x \in [3, 4] \\ 1/3 & \text{si } x \in [4, 8] \\ 1/3 + 2/3x & \text{si } x \in [8, 9] \end{cases}$  (voir figure 25 )

FIGURE 23 – Fonction  $\frac{1}{\mu_1}$ FIGURE 24 – Fonction  $\frac{1}{\mu_2}$ FIGURE 25 – Fonction  $\frac{1}{\mu_3}$ 

Dans une autre série de tests, on considère que la vitesse dépend que de  $\rho$ . Nous avons considéré deux fonctions  $\frac{1}{\rho}$ .

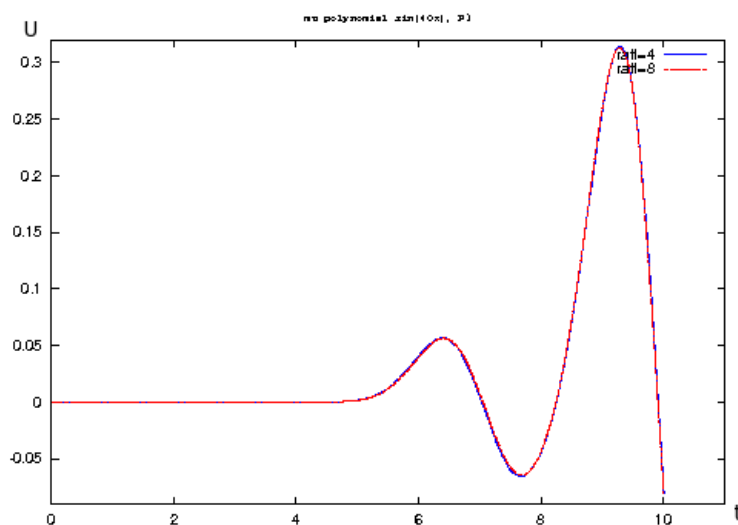
1.  $\frac{1}{\rho_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \pi \text{ ou } x \geq 3\pi \\ 1 + 0.5 \sin(x) & \text{si } x \in [\pi, 3\pi] \end{cases}$  (voir figure 26)
2.  $\frac{1}{\rho_2}(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq \pi \text{ ou } x \geq 3\pi \\ 2 + 1.5 \sin(40x) & \text{si } x \in [\pi, 3\pi] \end{cases}$  (voir figure 23 )

FIGURE 26 – Fonction  $\frac{1}{\rho_1}$ 

### 7.2.2 Résultats en 1D

Ici je vais présenter les résultats obtenus. Rappelons que nous avons placé le sismogramme en  $x=10m$ . Nous jugerons une solution comme bonne si  $U_{raff} = U_{2raff}$ , c'est-à-dire que les solutions se superposent lorsqu'on divise la taille de maille par 2. Nous partons toujours d'une taille initiale de maille de 0.1 puis nous raffinons. Nous écrirons alors par exemple Raff= 4 pour dire que nous avons divisé la taille initiale par 4, à savoir que la maille mesure maintenant 0.025.

**Expérience avec la vitesse  $\frac{1}{\mu_1}$**  Pour  $\frac{1}{\mu_1}$ , on obtient ce qu'on attend, à savoir que le polynomial est meilleur que le linéaire qui est lui même mieux que le constant par maille. En effet, regardons les résultats pour un raffinement de 4 et 8 (voir figures 27, 28 et 29 ).

FIGURE 27 – Solution avec des vitesses polynomiales par maille et un raffinement de 4 et 8 pour la vitesse  $\frac{1}{\mu_1}$

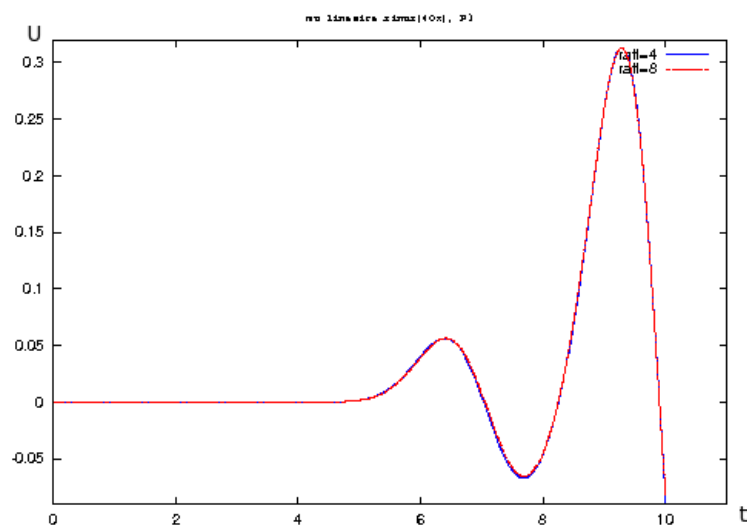


FIGURE 28 – Solution avec des vitesses linéaires par maille et un raffinement de 4 et 8 pour la vitesse  $\frac{1}{\mu_1}$

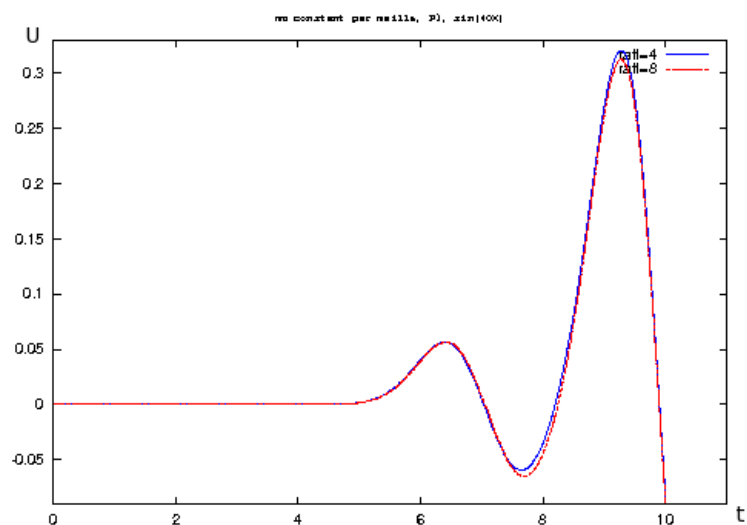


FIGURE 29 – Solution avec des vitesses constantes par maille et un raffinement de 4 et 8 pour la vitesse  $\frac{1}{\mu_1}$

**Expérience avec la vitesse  $\frac{1}{\mu_2}$**  Ici on n'obtient pas vraiment d'amélioration et on est obligé d'aller jusqu'à un raffinement de 16. De même, comparons les résultats obtenus avec des vitesses polynomiales et constantes par maille (voir figures 30, 31 et 32).



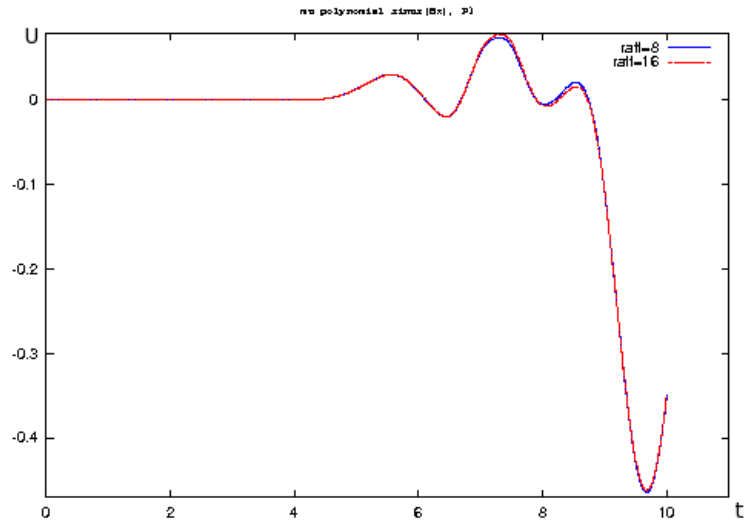


FIGURE 30 – Solution avec des vitesses polynomiales par maille et un raffinement de 8 et 16 pour la vitesse  $\frac{1}{\mu_2}$

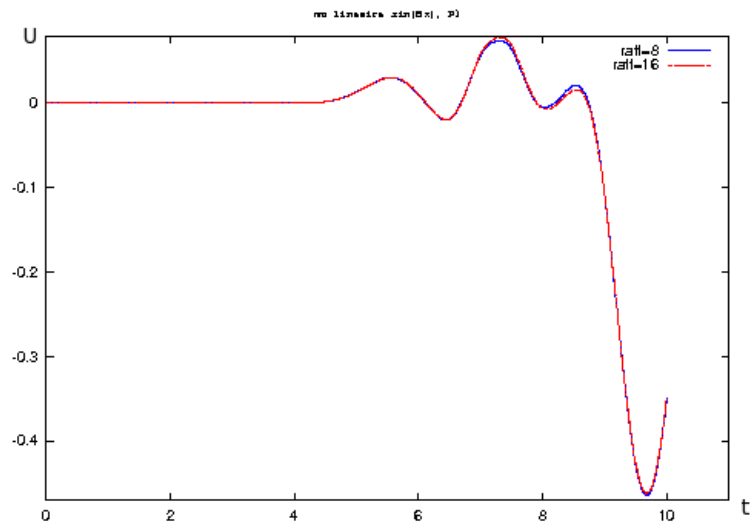


FIGURE 31 – Solution avec des vitesses linéaires par maille et un raffinement de 8 et 16 pour la vitesse  $\frac{1}{\mu_2}$

**Expérience avec la vitesse  $\frac{1}{\mu_3}$**  Ici c'est pareil, on ne voit pas d'amélioration. Regardons les résultats pour une vitesse linéaire, polynomiale et constante par maille et des raffinements de 4 et 8 (voir figures 33, 34 et 35).

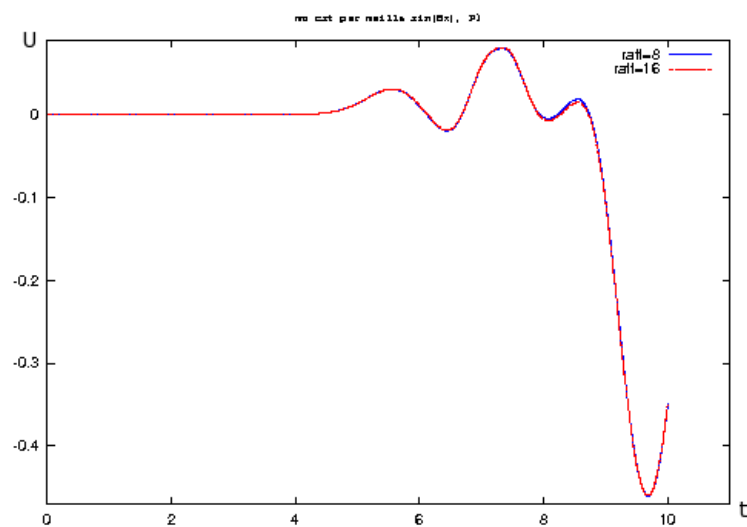


FIGURE 32 – Solution avec des vitesses constantes par maille et un raffinement de 8 et 16 pour la vitesse  $\frac{1}{\mu_2}$

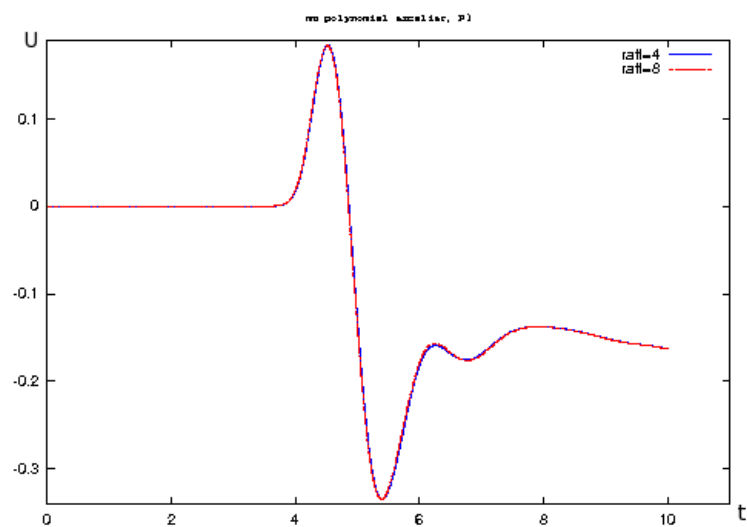


FIGURE 33 – Solution avec des vitesses polynomiales par maille et un raffinement de 4 et 8 pour la vitesse  $\frac{1}{\mu_3}$

**Expérience avec la vitesse  $\frac{1}{\rho_1}$**  Ici, pour un raffinement de 2 et 4, on obtient pour le cas linéaire la figure (36), puis pour le cas constant par maille la figure (37).

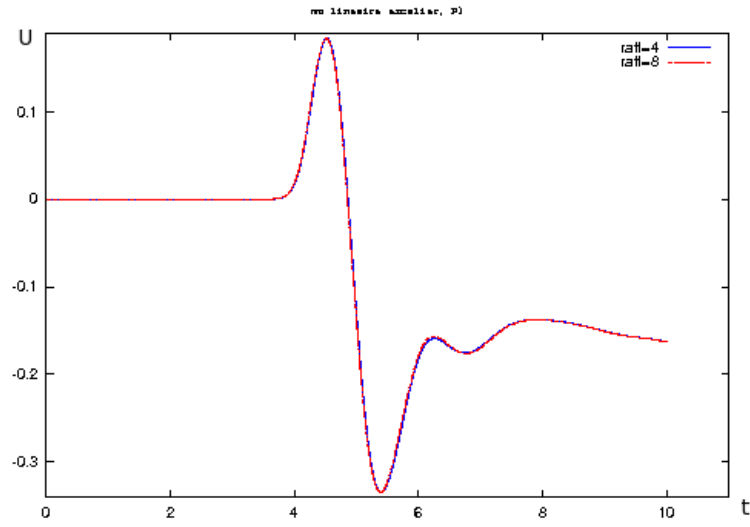


FIGURE 34 – Solution avec des vitesses linéaires par maille et un raffinement de 4 et 8 pour la vitesse  $\frac{1}{\mu_3}$

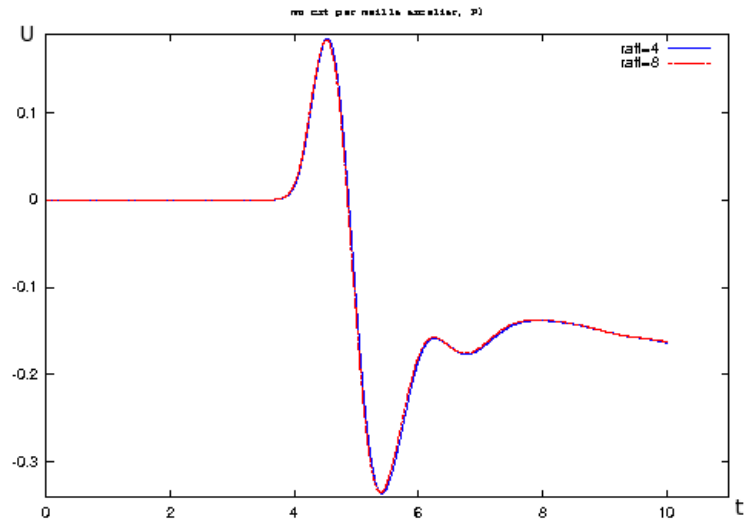


FIGURE 35 – Solution avec des vitesses constantes par maille et un raffinement de 4 et 8 pour la vitesse  $\frac{1}{\mu_3}$

**Expérience avec la vitesse  $\frac{1}{\rho_2}$**  Ici les résultats sont plutôt décevants. Nous sommes en  $P1$ , on remarque que le constant par maille est meilleur que le linéaire. En effet, observons le graphe pour le constant par maille à un raffinement de 4, 8 et le linéaire pour un raffinement de 8 et 16, ils sont comparables (voir figures 38 et 39).

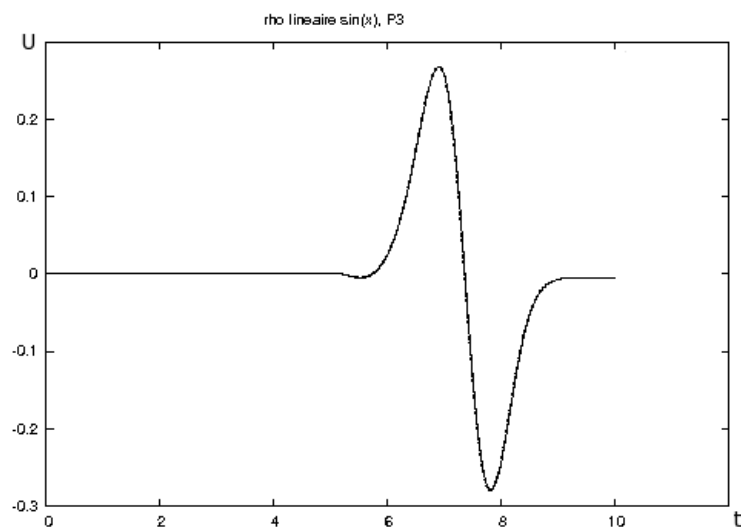


FIGURE 36 – Solution avec des vitesses linéaires par maille et un raffinement de 2 et 4 pour la vitesse  $\frac{1}{\rho_1}$

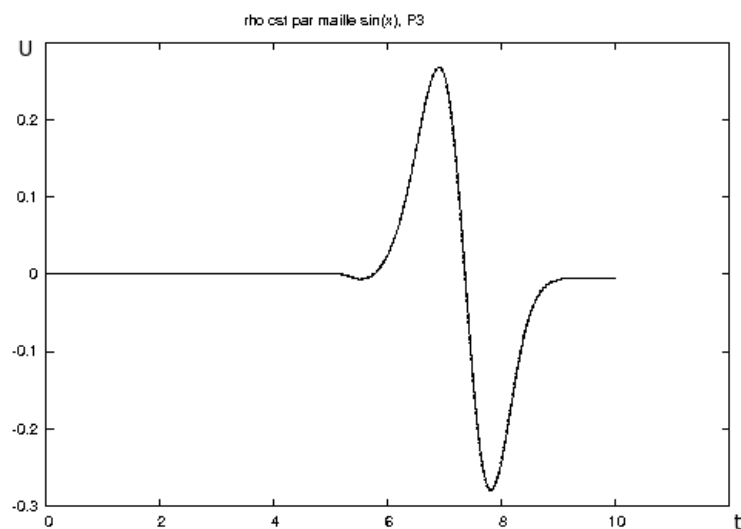


FIGURE 37 – Solution avec des vitesses constantes par maille et un raffinement de 2 et 4 pour la vitesse  $\frac{1}{\rho_1}$

**Conclusion** Le code 1D semble donc montrer que la méthode n'est pas efficace, dans le sens où en prenant des mailles équivalentes, on n'a pas forcément plus de précision avec les vitesses polynomiales par maille. Cependant, on peut espérer qu'en 2D, les vitesses polynomiales permettent d'éviter la difficulté du maillage. En effet, on n'est plus obligé de mailler en fonction du

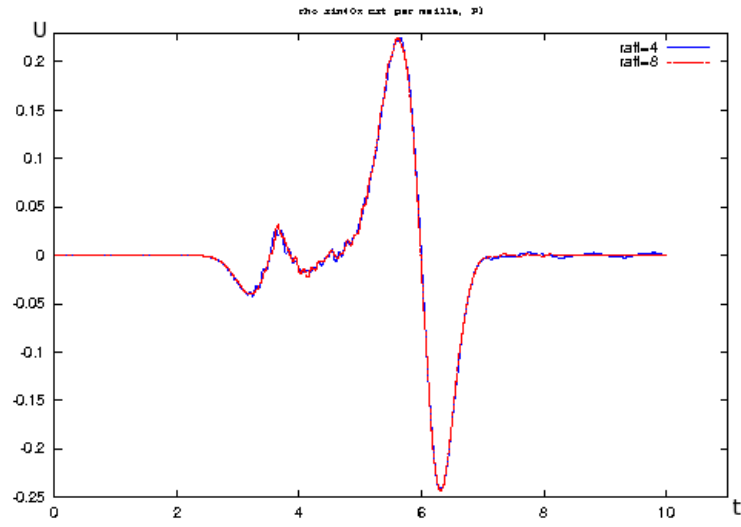


FIGURE 38 – Solution avec des vitesses constantes par maille et un raffinement de 4 et 8 pour la vitesse  $\frac{1}{\rho_2}$

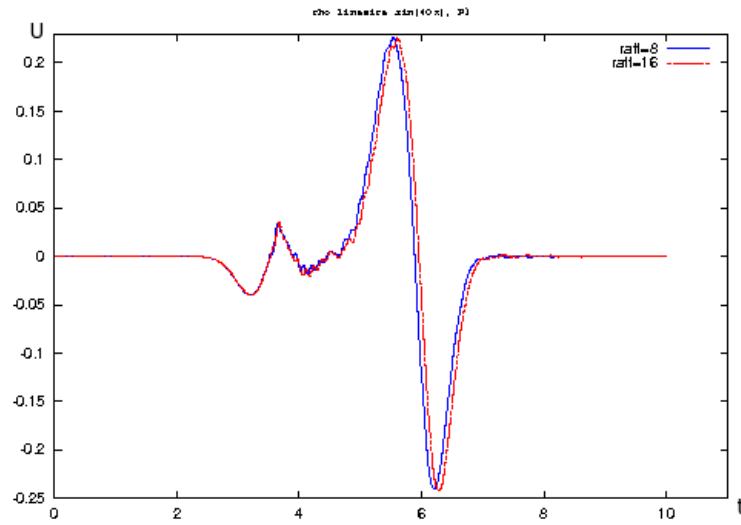


FIGURE 39 – Solution avec des vitesses linéaires par maille et un raffinement de 4 et 8 pour la vitesse  $\frac{1}{\rho_2}$

domaine, car il n'est plus nécessaire d'avoir la même vitesse au sein d'une maille.

### 7.2.3 Conditions d'expérience en 2D

En 2D, nous avons travaillé sur deux domaines : un domaine bicouche et un domaine qui se rapproche plus de la réalité, c'est-à-dire avec des vitesses qui varient en chaque point.

Dans un premier temps, nous avons fait tourner le code 2D en fortran sur un domaine bicouche de 1km par 1km, c'est-à-dire qu'on a mis une vitesse de  $c_1 = 1000\text{m/s}$  en haut et une vitesse de  $c_2 = 500\text{ m/s}$  en bas (voir figure 40 ). En 2D, nous ne considérerons que des vitesses dépendant de  $\mu$ . Dans une première expérience, nous maillerons chaque interface puis nous lancerons le code avec les vitesses constantes par maille. Ensuite, nous maillerons l'ensemble du modèle, puis nous lancerons le code avec les vitesses polynomiales. Nous utiliserons une source de Ricker d'ordre 2.

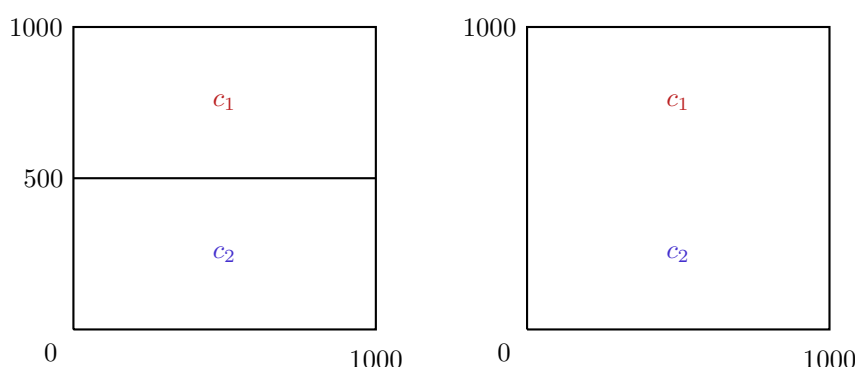


FIGURE 40 – Domaine d'étude en constant et polynomiale par maille

Ensuite, nous ferons tourner le code sur un domaine de  $[0, 24] \times [-3, 7]$  issu d'une étude réelle (voir figure 41). Pour des raisons de confidentialité, nous avons caché la topographie. En fait, dans chaque couche de ce modèle synthétique géologique, il y a un gradient de vitesse. Nous maillerons donc l'ensemble du domaine, puis nous lancerons le calcul avec des vitesses polynomiales. Nous utiliserons une source de Ricker d'ordre 2. Nous avons placé la source en  $(12, -1.725)$  et des simogrammes en  $(4.960, -1.111)$ ,  $(9.960, -1.287)$ ,  $(14.960, -1.254)$ ,  $(19.960, -1.176)$  et  $(23.960, -1.233)$  (voir figure 41). J'ai représenté par un point rouge la source et par des points violets les sismogrammes.

### 7.2.4 Résultats en 2D

**Domaine bicouche** Dans un premier temps, nous avons travaillé sans conditions aux limites absorbantes et nous allons présenter les résultats.

En maillant chaque interface avec les vitesses constantes par maille, on compare ensuite avec la solution exacte. On obtient la figure (42). Dans ce premier test, le maillage étant fait dans chaque couche, la vitesse est constante au sein de chaque maille.

Ensuite, en maillant tout le domaine et en prenant le code implémentant des vitesses polynomiales par maille, on compare avec la solution exacte et on obtient la figure (43). Ici, on a encore un domaine bicouche. Cependant, le maillage n'étant pas adapté au domaine, il y a certaines mailles qui ont deux vitesses différentes.

Maintenant, nous allons mettre une vitesse de 500m/s en haut et 1000m/s en bas et on met les CLA ( $\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot n = 0$ ). On compare ensuite le cas où les vitesses sont constantes, linéaires,

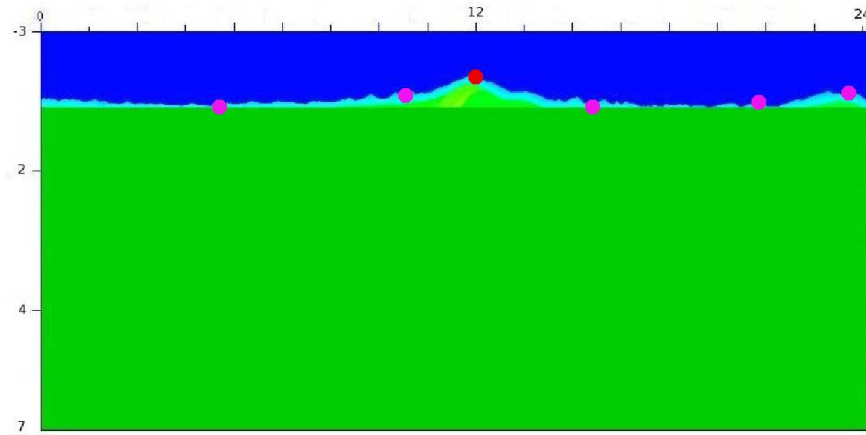


FIGURE 41 – Domaine réel d'étude

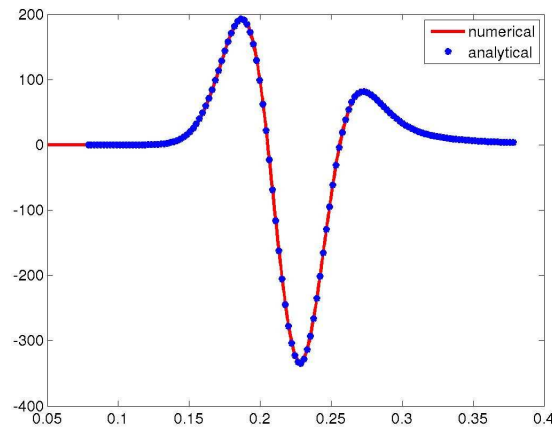


FIGURE 42 – Comparaison de la solution avec vitesses constantes par maille et solution exacte

polynomiales par maille avec la solution exacte et on obtient la figure (44).

On peut donc remarquer que le code avec les vitesses polynomiales par maille permet d'enlever la difficulté du maillage. En effet, on peut mailler indépendamment du milieu, et on obtient de bons résultats. C'est pour cela que nous avons ensuite voulu tester sur un domaine avec des valeurs de vitesses réelles que Total nous a fourni.

**Domaine réel** Ce domaine m'a permis de trouver une faille dans mon code. En effet, sur certaines mailles, avec l'interpolation polynomiale d'ordre 2, on calculait des vitesses négatives. Par exemple, sur la maille 177, en  $\hat{P}_1$ ,  $\hat{P}_6$  et  $\hat{P}_3$ , nous avons comme vitesses respectives de l'ordre de  $10^{-7}$ ,  $10^{-7}$  et  $10^{-5}$ . L'approximation polynomiale donne des vitesses négatives (voir figure 45).

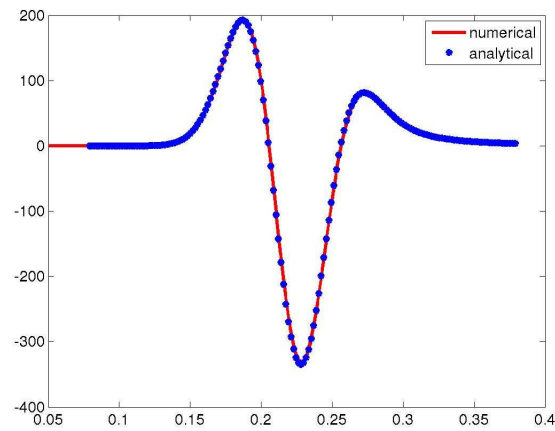


FIGURE 43 – Comparaison de la solution avec vitesses polynomiales par maille et solution exacte

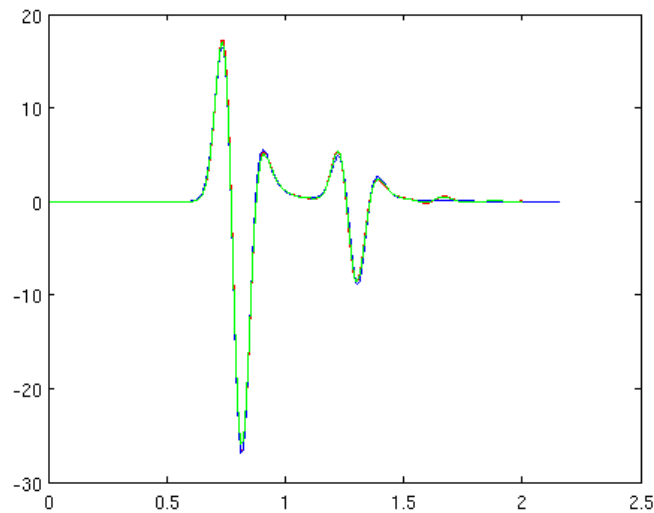


FIGURE 44 – Comparaison de la solution avec vitesses constantes, linéaires, polynomiales par maille et solution exacte

Par conséquent, pour palier ce problème, j'ai rajouté un test qui vérifie que les valeurs calculées sont bien positives. Si ce n'est pas le cas, alors on fait une interpolation linéaire sur cette maille. En effet, avec l'interpolation linéaire, on est sûr d'avoir une vitesse positive car bornée par les vitesses aux sommets de la maille.

Dans cette série de tests, nous considérons une source en  $(12, -1.725)$  à une fréquence de 8Hz. Nous mettons des conditions de Dirichlet sur le bord où il y a la montagne et des CLA sur les 3 autres bords. Nous allons prendre le même maillage et les mêmes conditions d'expéri-



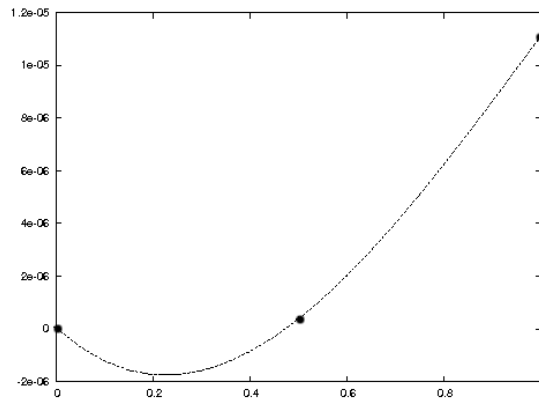


FIGURE 45 – Exemple d'interpolation donnant des vitesses négatives

ences effectuées chez Total, puis nous testerons notre code avec des vitesses constantes, linéaires et polynomiales par mailles grâce à des résultats fournis par TOTAL. Nous considérerons les sismogrammes de Total comme solution exacte.

Ici, étant donné qu'en chaque point, nous avons des vitesses différentes, pour avoir des vitesses constantes par maille, nous prenons la vitesse au barycentre de la maille et nous l'affectons à toute la maille. Nous nous plaçons en  $(9.960, -1.287)$  et faisons tourner le code avec des vitesses constantes par maille. Nous obtenons alors la figure 46.

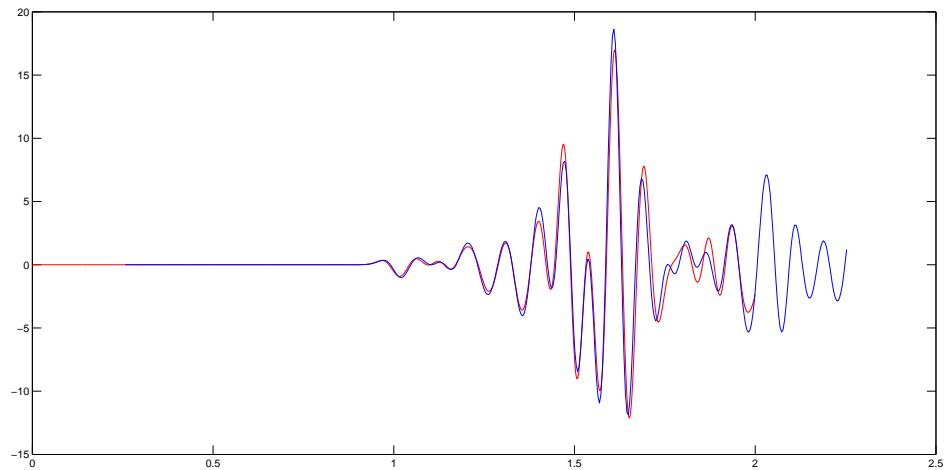


FIGURE 46 – Comparaison du constant par maille (en rouge) et solution exacte (en bleu)

Ensuite nous effectuons la même expérience mais avec des vitesses linéaires par maille. Nous obtenons la figure 47.

Et enfin avec des vitesses polynomiales par maille, nous obtenons la figure 48.

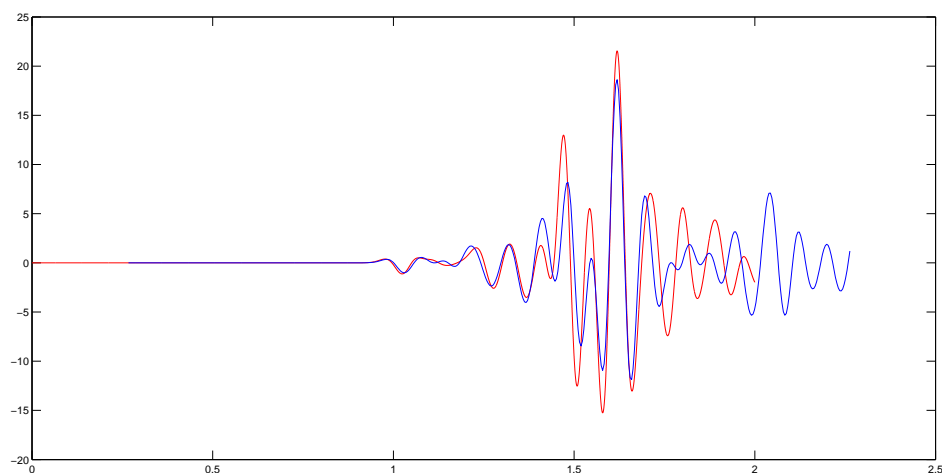


FIGURE 47 – Comparaison du linéaire par maille (en rouge) et solution exacte (en bleu)

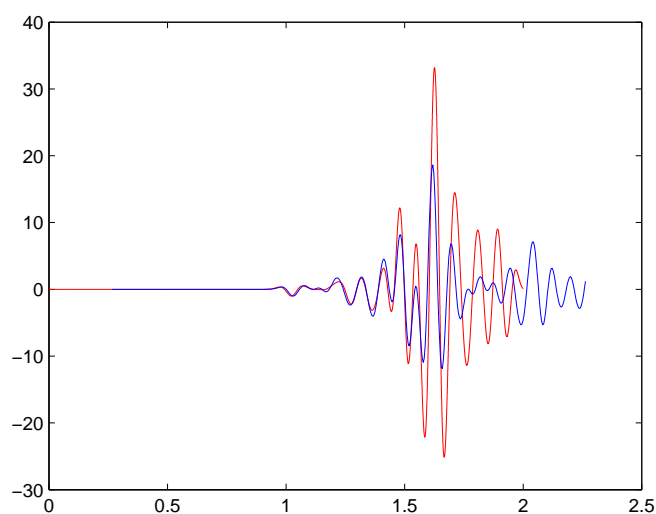


FIGURE 48 – Comparaison du polynomiale par maille (en rouge) et solution exacte (en bleu)

Par conséquent, pour ce maillage, les résultats avec les vitesses constantes par maille sont plus proches des résultats obtenus chez Total qu'avec les vitesses linéaires ou polynomiales par maille. Cependant, les calculs chez Total ont été effectués avec un code avec des vitesses constantes par maille et le maillage utilisé est trop grossier pour obtenir une bonne solution (dans le sens  $U_{raff} = U_{2raff}$ ). On peut donc se demander si dans ce cas le code avec les vitesses polynomiales

s'approche plus de la réalité... Cependant, pour vérifier il faudrait effectuer les calculs sur un maillage plus fin, ce qui prend beaucoup de temps. Ce sont les tests que je ferai pour terminer mon stage.

## Références

- [1] Hélène Barucq, Julien Diaz, and Sébastien Tordeux. *Analyse mathématique des phénomènes de propagation d'ondes*.
- [2] Marcus J. Grotte, Anna Schneebeli, and Dominik Schötzau. *Discontinuous Galerkin finite element method for the wave equation*.
- [3] Dimitri Komatitsch. *Cours de modélisation géophysique et calcul parallèle de M2*.
- [4] Michael Metcalf, John Reid, and Malcolm Cohen. *Fortran 95/2003 explained*. Oxford University Press.
- [5] Pierre-Arnaud Raviart and Jean-Marie Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*.



**RESEARCH CENTRE  
BORDEAUX – SUD-OUEST**

200 avenue de la Vieille Tour  
33405 Talence Cedex

Publisher  
Inria  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex  
[inria.fr](http://inria.fr)

ISSN 0249-6399